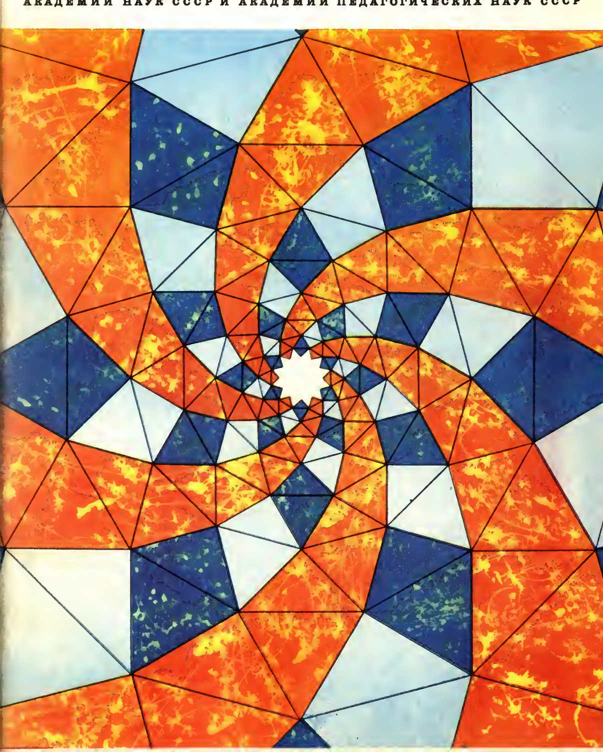
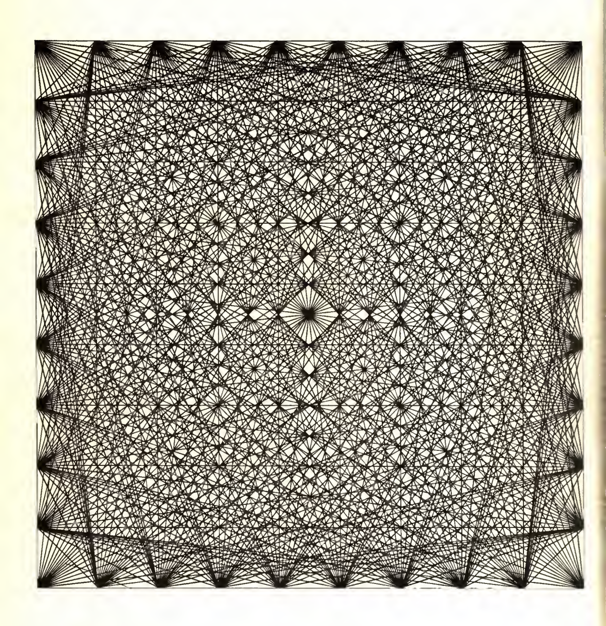
квант

4
1977

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Принцип построения этого орнамента совсем прост: каждая сторона квадрата поделена на девять равных частей и все точки деления попарно соединены отрезками друг с другом.

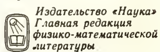
Постарайтесь ответить на ряд вопросов, относящихся к этому орнаменту. В скольких точках пересекаются отрезки внутри квадрата? Сколько точек пересечения, в которых пересекаются три отрезка, четыре, пять и т. д.? Сколько точек пересечения могут лежать на сторонах квадратов с вершинами в точках пересечения (найдите наибольшее и наименьшее числа)? Присутствуют ли другие правильные многоугольники на рисунке? Ждем ваших писем с ответами.

Основан в 1970 году



4
1977

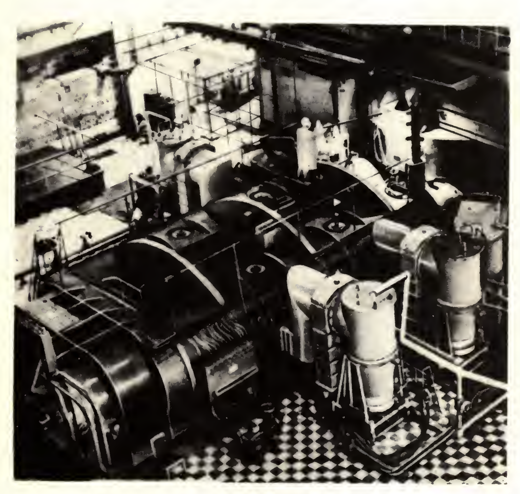
Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

На первой странице обложки — рисунок к заметке В. Березина «Равноугольная спираль» (см. с. 42).

В НОМЕРЕ:



УСКОРИТЕЛИ

Л. Гольдин

Редколлегия журнала «Квант» уже давно просила меня написать статью об ускорителях. Я тянул с этим несколько лет. Нужно ли знать читателям журнала о почти военных хитростях, которые непрерывно придумываются физиками и инженерами для того, чтобы заставить работать эти колоссальные, ни с чем не сравнимые сооружения: не слишком ли все это специально? Потом я все-таки решился, поняв, что материал можно изложить так, чтобы читатель не только усвоил строение зоологического древа ускорительного семейства, но и почерпнул для себя сведения и идеи, которые ему всегда пригодятся. Насколько мне это удалось, скажут мои читатели.

Уже несколько десятилетий развитие физики атомных ядер и физики элементарных частиц определяется тем, какие ускорители имеются в распоряжении ученых. И сегодня ввод в строй каждого нового крупного ускорителя предвещает новые открытия и пересмотр основных теоретических положений. Для изучения глубин Вселенной строят гигантские приборы. Многометровые зеркала оптических телескопов и растянувшиеся на километры антенны радиотелескопов ни у кого не вызывают удивления. Однако еще более крупные установки — огромные многокилометровые ускорители — создают для изучения

самых малых объектов современной науки — элементарных частиц.

Привычный нам мир состоит из небольшого числа частиц. Протоны, нейтроны, электроны, фотоны — вот, собственно говоря, и весь их список. Исследование радиоактивного распада позволило, кроме того, обнаружить нейтрино. Все остальные известные нам частицы — а их мы знаем уже около двухсот — крайне недолговечны. Чтобы их изучать, надо изготовлять их неподалеку от физической лаборатории. Для этого-то и сталкивают друг с другом обычные частицы — протоны и атомные ядра или электроны, ускоренные до больших энергий.

Небольшие ускорители сейчас широко используются в медицине и в технике для производства радиоактивных изотопов, для улучшения свойств полимерных материалов, для стерилизации медицинского оборудования, для лечения раковых больных и для многих других целей. Однако самые крупные, поражающие человеческое воображение ускорители строятся с чисто научными целями — чтобы изготовлять и изучать новые частицы.

Если перейти к определениям, то ускорителями принято называть установки, в которых заряженным частицам сообщается энергия при помощи электрических или электромагнитных полей. Незаряженные частицы мы ускорять не умеем. Когда необходимо получить быстрые незаряженные частицы — даже самые обычные, например, нейтроны — это приходится делать при помощи ускоренных заряженных частиц.

В простейших ускорителях разгон частиц производится в постоянном электрическом поле (*ускорители прямого действия*). Ускорение электронов в постоянном поле происходит также в рентгеновских трубках и в кинескопах телевизионных установок. Эти давно нам знакомые и столь полезные приборы не принято называть гордым именем ускорителей, хотя они вполне того заслуживают. В особенности это относится к рентгеновским трубкам, где электроны разгоняют с той же целью, что и в самых крупных современных ускорителях — для генерации новых частиц (фотонов рентгеновского диапазона) при соударении ускоренной частицы с материалом мишени. Кинетическая энергия K, которую приобретает ускоряемый электрон, равна

$$K = eV,$$

где e — заряд электрона, V — разность потенциалов, которую он проходит.

В ускорителях прямого действия не удается достичь энергии большей, чем несколько миллионов электронвольт *). Это происходит потому, что между электродами, расположенными на обычных расстояниях — до нескольких метров, — не удается создать разность потенциалов больше, чем несколько миллионов вольт. При больших напряжениях между электродами начинают происходить электрические пробои, с которыми никто не умеет бороться. Развитие всей современной ускорительной техники основано на преодолении этой трудности: заряженной частице нужно сообщить большую энергию, действуя на нее не очень сильными электрическими полями.

В небольшой — по необходимости — статье, конечно, не могут быть затронуты все вопросы ускорительной техники. Мы не будем, в частности, говорить о проблемах, связанных с получением вакуума. Читатель, однако, всегда должен помнить, что ускорение возможно только в высоком вакууме, иначе всю полученную энергию частицы в бесчисленных столкновениях будут передавать молекулам газа. В ускорителях обычных типов достаточно снизить давление на пути ускоряемых частиц до 10^{-9} *атм*. Такой вакуум давно освоен в технике.

Линейные ускорители

Линейные ускорители позволяют ускорять заряженные частицы до очень больших энергий, принципиально — до сколь угодно больших.

*) Электронвольт — это энергия, которую электрон (или другая частица с таким же зарядом) приобретает, пройдя разность потенциалов в 1 *в*; 1 *эв* = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж*.

1*

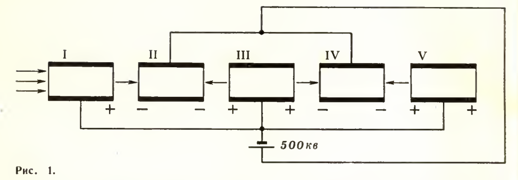


Рис. 1.

Пусть требуется ускорить протоны до энергии 30 *Мэв* *). В ускорителе прямого действия для этого потребовалось бы пропустить их между электродами, к которым приложена разность потенциалов 30 миллионов вольт. Как уже было выяснено, сделать этого нельзя из-за электрических пробоев. Однако ту же энергию протон приобретает, пройдя через 60 последовательно расположенных промежутков с напряжением 500 киловольт каждый. Такое напряжение к электродам приложить можно.

Попробуем нарисовать схему ускорителя с несколькими ускоряющими промежутками. Не удастся ли нам обойтись одним электрическим генератором? На рисунке 1 сделана такая попытка. Пучок протонов (или других ускоряемых частиц) проходит через систему расположенных друг за другом трубчатых электродов. Электроды попеременно присоединены к положительному и к отрицательному полюсам батареи. Внутри трубок частицы движутся с постоянной скоростью и их энергия не меняется (внутри проводящей трубки электрическое поле равно нулю). Проходя промежуток между трубками, они испытывают действие электрического поля, в результате чего их кинетическая энергия меняется.

Рассмотрим нашу схему более подробно. В промежутке между первой и второй трубкой направление электрического поля совпадает с направлением скорости протонов, и следовательно, поле их ускоряет. Однако в следующем промежутке поле направлено навстречу летящим частицам и замедляет их. В третьем промежутке частицы ускоряются, а в четвертом снова замедляются. Ускоритель, таким образом, у нас не получился. Чтобы заставить протоны непрерывно ускоряться, нужно сделать так, чтобы во всех промежутках между трубками электрическое поле было направлено в одну сторону. Если попытаться достичь этого при помощи батарей, потенциал трубок должен монотонно изменяться вдоль ускорителя. Разность потенциалов между первой и последней трубками должна достигать — в нашем случае — тех же 30 миллионов вольт, чего, как уже объяснялось, сделать нельзя. Этот путь оказывается, таким образом, закрытым.

Попробуем решить эту задачу, воспользовавшись источником переменного напряжения. Соберем схему так, как это показано на рисунке 2. Пусть протоны пересекают промежуток между первой и второй трубками в тот момент, когда знаки потенциалов на трубках соответствуют красным обозначениям. Проходя этот промежуток, протоны ускоряются. Как мы уже говорили, во время движения внутри трубки частицы не испытывают действия электрических сил. В это время можно изменить напряжение на трубках так, чтобы к моменту, когда протоны вылетят из второй трубки, знаки потенциалов соответствовали не красным, а синим обозначениям. В зазоре между второй и третьей трубками протоны снова приобретут энергию и затем «спрячутся» в третьей трубке. За то время, пока они летят сквозь нее, поменяем снова знаки потенциалов так, чтобы вернуться к красным обозначениям, и т.д. Таким образом, пролетая сквозь всю

*) 1 *Мэв* = 10^6 *эв*.

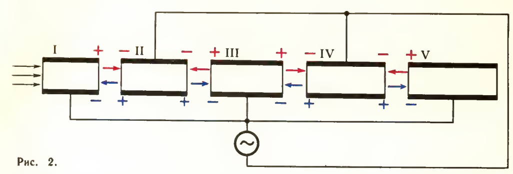


Рис. 2.

систему электродов, частицы непрерывно приобретают энергию.

Ускорители, построенные по рассмотренной схеме, называют *линейными ускорителями*, поскольку электроды в них располагаются вдоль прямой линии. Трубчатые электроды линейных ускорителей называют *трубками дрейфа* (вместо того чтобы говорить, что частицы внутри электродов движутся без ускорения, принято говорить, что они в них дрейфуют). Промежутки между трубками дрейфа называют *ускоряющими промежутками*.

В ускорителях прямого действия частицы летят непрерывной струей. В линейном ускорителе они движутся сгустками: ускоряются только те частицы, которые прошли ускоряющий промежуток в тот момент, когда электрическое поле имело нужное направление.

Легко видеть, что длина трубок дрейфа в линейном ускорителе должна постепенно возрастать. Частицы движутся вдоль ускорителя со все возрастающей скоростью. Они должны пролетать все трубки за одно и то же время, равное половине периода переменного напряжения. Длина n-й трубки равна, следовательно,

$$l_n = v_n \frac{T}{2}, \qquad (1)$$

где v_n— скорость, с которой ускоряемые частицы ее пролетают, а T — период изменения переменного напряжения. Скорость v_n нетрудно рассчитать по кинетической энергии, которую имеет ускоряемая частица. Это особенно просто сделать в том случае, когда можно пользоваться обычной нерелятивистской формулой

$$K = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Массу частицы мы обозначили здесь через m_0. Эта формула применима в тех случаях, когда кинетическая энергия много меньше энергии покоя частицы E_0 —

$$E_0 = m_0 c^2,$$

где c — скорость света. Энергия покоя E_0 для электрона равна 0,5 *Мэв*, а для протона — 938 *Мэв*. Мы видим, что в диапазоне энергий, в котором работают линейные ускорители, (до нескольких сот *Мэв*), пользоваться формулой $K = \frac{m_0 v^2}{2}$ для электронов нельзя, а для протонов — при не слишком больших ускорителях — можно.

Кинетическая энергия, которую имеет протон, проходящий n-ю трубку дрейфа, равна

$$K_n = \frac{m_0 v_n^2}{2}. \qquad (2)$$

В n-ю трубку протон попадает, пройдя $(n-1)$ ускоряющий промежуток, то есть приобретя энергию $(n-1)\,eV$ (*эв*). Если начальная энергия, с которой протон вводится, или, как обычно говорят, *инжектируется* в линейный ускоритель из какого-нибудь предварительного ускоряющего устройства, равна K_0, то

$$K_n = K_0 + (n-1)\,eV. \qquad (3)$$

Найдя из (2) и (3) значение v_n и подставив его в (1), получим

$$l_n = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{2}{m_0} [K_0 + (n-1)\,eV]}. \qquad (4)$$

Энергия инжекции K_0 обычно невелика, так что член K_0 играет роль поправки. Длина трубок дрейфа, грубо говоря, растет как корень из порядкового номера ускоряющего промежутка, за которым она расположена.

Рассчитаем для примера, какой должна быть длина трубки дрейфа, в которую попадает протон с энергией 10 *Мэв*. Напишем формулу (2) в виде

$$K_n = \frac{m_0c^2}{2}\left(\frac{v_n}{c}\right)^2.$$

Из этой формулы найдем

$$v_n = c\sqrt{\frac{2K_n}{m_0c^2}}.$$

Подставляя $K_n = 10$ *Мэв* и $m_0c^2 = 938$ *Мэв*, найдем $v_n = 0{,}146\ c = 4{,}4 \times 10^7$ *м/сек*. Мы видим, что при энергии 10*Мэв* скорость протона всего в 7 раз меньше скорости света. При бо́льших энергиях она еще выше.

Какую же длину должны иметь трубки дрейфа? С помощью формулы (4) найдем, что при частоте колебаний напряжения $f = 1/T = 100$ *гц* длина трубки дрейфа, которую пролетает протон с энергией 10 *Мэв*, должна составлять $2{,}2 \cdot 10^5$ *м* = 220 *км*, при частоте 1*Мгц* — 22 *м*, при частоте 10 *Мгц* — 2,2 *м*. Все эти значения слишком велики. Чтобы понять это, достаточно вспомнить, что мы «конструировали» ускоритель на очень небольшую энергию 30 *Мэв* и речь все-таки шла о 60 трубках дрейфа! Чтобы получить линейный ускоритель разумных размеров, нужны существенно более высокие частоты.

В протонных ускорителях выбирают обычно частоты от 150 до 300 *Мгц*, а в электронных — еще выше. Для сравнения укажем, что длинноволновые радиостанции работают на частотах порядка 200 *кгц*, диапазон средних волн лежит при частотах ~ 1 *Мгц*, а коротковолновые радиостанции работают при частотах ~ 10 *Мгц*. Частота, с которой приходится менять потенциалы на трубках дрейфа линейного ускорителя, в 10÷20 раз выше, чем высота, на которой работают коротковолновые радиостанции! При таких частотах волновые свойства полей оказываются очень существенными и даже выступают на первый план.

Заметим, что частотам 150÷300 *Мгц* соответствуют длины волн $\lambda = c/T = cf$ от 1 до 2 *м*. В этих условиях схема, изображенная на рисунке 2, оказывается очень наивной. Утверждая, что длина волны равна 1 *м*, мы, тем самым, говорим, что направления вектора напряженности электрического поля в один и тот же момент времени противоположны в точках, разнесенных на 0,5 *м*. Это утверждение одинаково справедливо для точек, разделенных воздушным промежутком или соединенных между собой проводом, так что на протяжении проводника длиной в несколько метров напряжение несколько раз меняет свой знак. Поэтому нельзя считать, что, соединяя трубки I, III и V проводом, как это изображено на рисунке 2, мы обеспечиваем одновременную перемену знака напряжения на всех ускоряющих промежутках.

Поговорим подробнее о свойствах высокочастотных электромагнитных колебаний. Прежде всего, следует разъяснить, почему мы говорим об электромагнитных колебаниях, когда для ускорения достаточно одного только электрического поля. Связь электрических и магнитных явлений проявляется не только при высоких частотах. Даже при постоянных токах вокруг несущих ток проводников возникает магнитное поле. Однако, чем выше частота, тем теснее переплетаются электрические и магнитные поля, так что говорить о них порознь становится бессмысленно. Поэтому мы и ведем здесь речь об электромагнитных, а не об электрических колебаниях.

При низких частотах электрические и магнитные явления определяются зарядами и токами, то есть расположением и потенциалами близлежащих проводников. Электромагнитные колебания высоких частот хорошо распространяются и без проводников, как мы это знаем на примере радиоволн.

. Электромагнитные колебания могут существовать не только в открытом пространстве, но и в замкнутых объемах (которые принято называть *резонаторами*). «Поведение» электромагнитных волн в резонаторах очень похоже на поведение звуковых волн. Вспомним (в качестве полезной аналогии), как происходят акустические колебания в трубах органа. Музыкант вызывает эти колебания, исполняя, например, фуги Баха. Воздух, проходящий через трубу, раскачива-

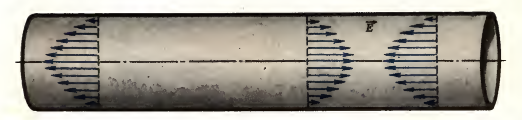


Рис. 3.

ет язычки, движение которых возбуждает в воздухе звуковые колебания.

В трубе можно возбудить не любые колебания, а только такие, на которые труба настроена. Настройка трубы определяется соотношением между ее длиной и длиной волны. В трубе, закрытой с обоих торцов, можно возбудить только такие волны (стоячие), для которых половина длины волны укладывается в трубе целое число раз. Чтобы исполнять на органе музыкальные произведения, нужно возбуждать в трубах самые разные звуки. Органы содержат поэтому тысячи труб.

Аналогичным образом устанавливаются электромагнитные колебания в замкнутых металлических трубах. Длина трубы должна быть хорошо согласована с частотой электромагнитных колебаний, на которых она должна работать. В эту тщательно сделанную полированную изнутри трубу — в резонатор линейного ускорителя — и помещают вдоль ее оси трубки дрейфа. Чтобы возбудить колебания, в трубу вводят излучатель — антенну или виток.

На рисунке 3 изображена картина силовых линий высокочастотного поля, которое создается в резонаторе в некоторый момент времени. Стрелками изображены силовые линии электрического поля. Силовые линии магнитного поля на рисунке не показаны. Они имеют вид колец, окружающих пучки линий электрического поля. Через половину периода электромагнитных колебаний силовые линии изменят свое направление на обратное.

Напряженность электрического поля, создаваемого в резонаторе, максимальна около его оси и падает почти до нуля у стенок. Если бы это было не так, то электрическое поле создавало бы в стенках большие токи, которые приводили бы к нагреву стенок — к бесполезной затрате мощности. Поле такой конфигурации можно создать в трубе лишь в том случае, если ее диаметр согласован с длиной волны. Мы видим, что как длина, так и поперечные размеры резонатора должны подбираться очень тщательно.

Помещенные в резонатор трубки дрейфа несколько искажают картину электромагнитных колебаний. Внутри трубок возникает свободное от колебаний пространство, так как поле не может проникнуть сквозь их проводящие стенки. Поле вытесняется из трубок дрейфа в ускоряющие промежутки.

При ускорении частиц до очень больших энергий отпадает необходимость «прятать» частицы в трубки дрейфа. Через ускоритель можно пропускать обычные электромагнитные волны. Если скорость частицы близка к скорости света, то, попав на удачный участок волны, где вектор напряженности электрического поля достаточно велик и имеет нужное направление, частица все время будет ускоряться.

«Очень большие» энергии, о которых мы говорили, для разных частиц могут сильно отличаться друг от друга. Для протонов и других тяжелых частиц это энергии порядка многих тысяч *Мэв*. А для электронов энергия порядка нескольких *Мэв* является уже очень большой.

Ускорители, о которых мы сейчас говорили, называются *ускорителями с бегущей волной*. Большой линейный ускоритель с бегущей волной для ускорения электронов до энергии 2000 *Мэв* построен в физико-техническом институте АН УССР в Харькове.

Циклические ускорители

Линейные ускорители на большие энергии оказываются очень дорогими. Для примера укажем, что линейный ускоритель электронов в Стенфорде (США) на энергию 20 000 *Мэв* имеет длину более 3,5 *км*. На всем этом протяжении непрерывной чередой расположены уникальные по мощности и очень дорогие высокочастотные станции.

Более экономным оказывается свернуть траекторию ускоряемых частиц в спираль или в кольцо, непрерывно возвращая их к одним и тем же ускоряющим станциям. Такие ускорители называются *циклическими*. Для искривления траектории применяются магнитные поля. Как ни дороги магниты, как ни велики расходы на электроэнергию, необходимую для их питания, эти затраты с лихвой перекрываются экономией на высокочастотных устройствах.

Напишем несколько простых формул. Искривление траектории вызывается силой Лоренца, действующей на частицу со стороны магнитного поля. Эта сила, как известно, равна

$$F = evB, \qquad (5)$$

где e — заряд частицы, v — ее скорость, а B — индукция магнитного поля (предполагается, что направление $\vec{v}$ перпендикулярно направлению $\vec{B}$). Сила Лоренца перпендикулярна как направлению магнитного поля, так и направлению скорости частицы. Она сообщает частице центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{R}$, так что движение происходит по кругу. Величина силы F и радиус окружности связаны, как известно, формулой

$$F = \frac{mv^2}{R}. \qquad (6)$$

Приравнивая правые части формул (5) и (6), найдем

$$evB = \frac{mv^2}{R},$$

или

$$p = mv = eBR, \qquad (7)$$

где $p = mv$ — импульс частицы. Если понимать под массой релятивистскую массу частицы, определяемую формулой

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (8)$$

то соотношение (7) оказывается справедливым и при релятивистских энергиях.

Формула (7) показывает, что с индукцией магнитного поля и с размерами ускорителя простым соотношением связана не привычная нам энергия частицы, а ее импульс. Импульс и кинетическая энергия в релятивистской механике связаны довольно сложной формулой

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K(K + 2m_0c^2)}.$$

Под корнем этого выражения стоит величина, имеющая размерность квадрата энергии. Если умножить это выражение на c, то получим

$$pc = \sqrt{K(K + 2m_0c^2)}.$$

Эта формула показывает, что вместо импульса p удобно рассматривать пропорциональную ему величину pc, имеющую размерность энергии (pc принято измерять в электрон-вольтах). При $K \ll m_0c^2$ (нерелятивистский случай) это выражение переходит в знакомую формулу $p = \sqrt{2m_0K}$, а при $K \gg m_0c^2$ (большие энергии) имеем просто $pc = K$. В этих единицах формула (7) принимает знакомый всем физикам вид

$$pc\ (\text{эв}) = 3 \cdot 10^8\ BR\ (\text{тл} \cdot \text{м}). \qquad (9)$$

При помощи формулы (9) можно оценить размеры циклических ускорителей. Магнитные поля всегда стремятся выбирать посильнее, чтобы иметь ускоритель меньших размеров и веса. Но при индукции 2 *тл* железо, из которого делают электромагниты, насыщается. Поэтому получать более сильные поля в ускорителях с железными магнитопроводами не удается. В вакуумной камере ускорителей индукция поля обычно не превосходит 1,6 *тл*. Обычно в ускорителях между магнитами приходится оставлять промежутки, необходимые для размещения ускоряющих станций, корректирующих устройств, аппаратуры для ввода и вывода частиц и т. д. В результате этого среднее значение $|\vec{B}|$ оказывается еще

ниже — около 1,2 *тл*. Подставляя в формулу (9) $B=1{,}2$ *тл*, найдем

$$R \approx 3 \cdot 10^{-9}\ pc. \qquad (10)$$

Приведем некоторые оценки для протонов. Для ускорения протонов до энергии 20 *Мэв* ($pc=200$ *Мэв*) необходим ускоритель с радиусом $R \approx \approx 60$ *см*. При энергии 600 *Мэв* ($pc = =1200$ *Мэв*) $R \approx 3{,}6$ *м*. При ускорении до 10 *Гэв* * ($pc=11$ *Гэв*) $R=30$ *м* (ускоритель Института теоретической и экспериментальной физики в Москве, ускоритель Лаборатории высоких энергий в Дубне). При энергии 70 *Гэв* (Серпуховский ускоритель) $R \approx 200$ *м*, а при энергии 500 *Гэв* (ускоритель Лаборатории имени Ферми, США) $R \approx 1{,}5$ *км*. Эти оценки определяют масштаб сооружений и ставят жесткие экономические преграды на пути повышения предельной энергии ускорителей. Размеры, а вместе с ними и стоимость циклических ускорителей в конце концов определяются просто магнитными свойствами железа.

Возможен ли здесь какой-либо прогресс? Предельные индукции, достижимые при использовании различных ферромагнетиков, очень близки друг к другу, так что надеяться на изобретение сплава с существенно большей индукцией насыщения не приходится. Единственным реальным путем является отказ от обычных магнитов и переход к магнитам на сверхпроводниках. При этом индукция может быть поднята в 2—3 раза. Как ни дороги сверхпроводники и как ни сложно работать с низкими температурами, ускорительная техника должна начать двигаться в эту сторону. Сооружение первого сверхпроводящего ускорителя уже осуществляется в Лаборатории имени Ферми.

Вернемся к формуле (9). По мере ускорения частиц их импульс p увеличивается, а значит, должны возрастать либо радиус траектории R, либо индукция поля B. Проще всего, конечно, работать в постоянном магнитном поле. Траектория ускоряемых частиц имеет в этом случае вид раскручивающейся спирали. Формула (10) определяет радиус ее наружного витка. Магнитные полюсы электромагнита имеют форму дисков, перекрывающих всю спираль. Так устроены *циклотроны*. Сделать сплошной магнитный полюс радиусом 60 *см* или 3,6 *м* еще можно. Однако для ускорения протонов до энергии 10 *Гэв* необходим полюс радиусом около 30 *м*. Делать такие сплошные полюсы невозможно. Именно это обстоятельство ограничивает предельные энергии, достигаемые при помощи циклотронов.

*) 1 *Гэв* = 10^3 *Мэв*.

В ускорителях на большие энергии магнитное поле создается только на узкой кольцевой дорожке. Радиус R, по которому должны двигаться частицы, таким образом, задан, и траектория частиц в конце и в начале ускорения одна и та же. Увеличение импульса частиц должно при этом сопровождаться возрастанием магнитного поля. Ускорители с кольцевым возрастающим во времени полем носят название *синхротронов* (магнитное поле возрастает синхронно с импульсом).

Циклотроны, фазотроны и микротроны

Циклотроны применяются для ускорения протонов и тяжелых ионов. Они были придуманы Дж. Лоуренсом. Схема устройства циклотрона изображена на рисунке 4. Магнитное поле, «заворачивающее» частицы, создается в зазоре между полюсами электромагнита. В этот зазор помещается вакуумная камера, напоминающая по форме гигантскую консервную банку. В вакуумной камере расположены электроды, между которыми создается ускоряющее электрическое поле. Они тоже похожи на консервную банку. Чтобы получить электроды, эту банку надо разрезать по диаметру и слегка раздвинуть половинки так, чтобы между ними образовалась щель. Каждая из половинок и образует электрод. К ним подводится высокочастотное ускоряющее напряжение. Как видно из рисунка 4, *б*, электроды напоминают по форме латинскую букву *D*. Они называются *дуантами*. Щель между дуантами выполняет функцию ускоряющего промежутка.

Дуанты в циклотроне играют ту же роль, что и дрейфовые трубки в

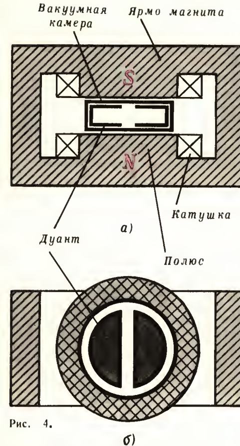


Рис. 4.

линейном ускорителе. Пока траектория частиц проходит внутри дуантов, они защищены от действия электрического поля, а когда поле между дуантами приобретает нужное направление и величину, частицы вылетают в зазор, ускоряются в нем и вновь прячутся внутрь дуантов. Таким образом происходит ускорение.

От чего зависит период T обращения частицы в циклотроне? Частица, движущаяся со скоростью v, проходит окружность радиуса R за время $2\pi R/v$. Так как $v = \frac{eBR}{m}$ (см. (7)), то

$$T = 2\pi \frac{m}{eB}. \qquad (11)$$

Период обращения определяется массой частицы и величиной индукции магнитного поля. При небольших энергиях вместо релятивистской массы m можно подставлять массу покоя m_0. Если магнитное поле постоянно во всем промежутке между дуантами (плоские магнитные полюсы), правая часть равенства (11) превращается в константу и период обращения оказывается постоянным. Этот результат имеет важнейшее значение. Частота питающего циклотрон высокочастотного напряжения неизменна, неизменен и период обращения частиц. Если частота выбрана правильно, то в течение всего цикла ускорения частицы вовремя попадают в ускоряющий промежуток между дуантами и вовремя прячутся внутрь дуантов.

Частицы непрерывно вводятся в камеру циклотрона вблизи от ее центра. Приобретая энергию, они раскручиваются по виткам спирали и покидают циклотрон. Пока одни частицы заканчивают цикл ускорения, другие находятся на середине пути, а третьи его еще только начинают. Вылетающая из циклотрона «струя» ускоренных частиц состоит из следующих друг за другом сгустков частиц, пролетающих ускоряющие промежутки в подходящие для ускорения моменты времени.

На странице 2 приведена фотография циклотрона для ускорения многозарядных ионов, который находится в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне.

Обратимся к подводным камням, которые пока ускользнули от нашего внимания. Главное затруднение связано с релятивистскими поправками. Заменять m на m_0, как мы это делали до сих пор, можно только при небольших энергиях. Формула (8) показывает, что с увеличением скорости масса частицы постепенно растет. Как это сказывается на синхронности обращения частиц и колебаний ускоряющего поля?

Вернемся к формуле (11). На первый взгляд не представляет труда обеспечить постоянство периода обращения и в этом случае. Масса частицы m постепенно возрастает. Вместе с тем возрастает радиус описываемого витка спирали. Казалось бы, нетрудно обеспечить постоянство отношения m/B, а значит, и постоянство T. Для этого достаточно создать между полюсами в циклотроне поле, индукция которого увеличивалась бы от центра к периферии. Однако этот путь закрыт. Оказывается, что при такой форме магнитного поля движение частиц становится неустойчивым:

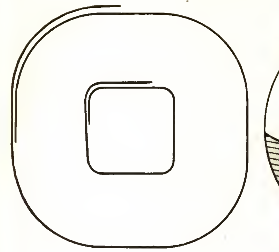


Рис. 5.

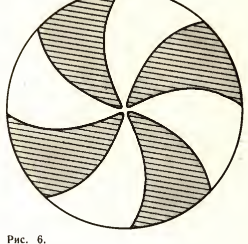


Рис. 6.

даже при небольших отклонениях от средней горизонтальной плоскости ускоряемые частицы быстро уходят вверх или вниз и ударяются о крышки дуантов. Поэтому обычные циклотроны, в которых не принимается мер для компенсации эффектов, связанных с релятивистским возрастанием массы, могут ускорять протоны только до небольших энергий — приблизительно до энергии 20 *Мэв*.

Второй путь заключается в том, чтобы примириться с тем, что период обращения частиц постепенно возрастает, и соответственно изменять период ускоряющего напряжения. Именно так чаще всего и поступают. При этом, однако, циклотрон уже не может работать непрерывно. В тот момент, когда период высокочастотного напряжения увеличился в соответствии с энергией ускоряемых частиц, впускать новые частицы не имеет смысла — их период обращения не равен периоду изменения высокочастотного поля. Когда цикл ускорения закончен, частоту можно снова поднять и инжектировать новые частицы. Циклотрон, таким образом, будет выдавать отдельные порции или, как часто говорят, «плевки» ускоренных частиц. Ускорители подобного типа строят до энергии порядка 1 *Гэв* (при ускорении до больших энергий применяют кольцевые машины). Такие ускорители называют *фазотронами*.

Есть и третий путь. Можно добиться того, чтобы период обращения не зависел от энергии частицы, усложнив форму ее траектории. Так поступают в *изохронных циклотронах*. Как мы выяснили, при круговой (или, точнее говоря, спиральной) форме траектории период обращения частиц возрастает с радиусом. Чтобы избежать этого, искусственно увеличим время движения частицы при малых энергиях. Это можно сделать, удлинив траекторию, например, придав ей вместо окружности форму многоугольника со скругленными углами. Траектории такого вида изображены на рисунке 5. По мере увеличения энергии частицы углы многоугольника все более скругляются, и траектория частицы приближается к круговой.

Чтобы заставить частицу двигаться по такой траектории, надо создать магнитное поле сложной конфигурации. Для этого электромагнит изохронного циклотрона делают из нескольких отдельных магнитов, располагающихся на участках, где траектория должна скругляться. Полюсы электромагнита имеют сложную форму (см. рисунок 6).

Указанный путь — при кажущейся его привлекательности — очень сложен. Но по нему приходится идти, если нужны большие интенсивности, а значит, не отдельные «плевки», а добротная «струя» ускоренных частиц.

Заканчивая обзор ускорителей, использующих постоянные во времени магнитные поля, скажем несколько слов о *микротронах*. Так называются ускорители электронов, придуманные

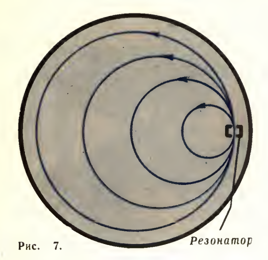


Рис. 7.

в свое время академиком В. И. Векслером, затем незаслуженно забытые и, наконец, недавно вновь возвращенные к жизни. Траектории электронов в таких ускорителях имеют вид окружностей, касающихся друг друга в одной точке, как это изображено на рисунке 7. В общей для всех окружностей точке помещен ускоряющий промежуток (резонатор). Пройдя через него очередной раз, частица ускоряется и переходит на следующую окружность. Другие электроны при этом движутся по предыдущим окружностям.

Для успешной работы микротрона необходимо, чтобы электроны приходили к ускоряющему промежутку в тот момент, когда поле имеет нужное направление. Можно показать, что это условие выполняется, если частица при прохождении ускоряющего промежутка приобретает энергию, равную (или кратную) ее энергии покоя m_0c^2. (Этот расчет очень прост, и, пользуясь уже приведенными нами формулами, читатель может сделать его самостоятельно.) Тогда каждый следующий виток траектории электроны будут проходить дольше, чем предыдущий, на время, равное одному или нескольким периодам колебаний ускоряющего поля. И каждый раз они будут попадать в резонатор в тот момент, когда ускоряющее поле будет направлено в нужную сторону.

Такие ускорители можно построить только для электронов, потому что для более тяжелых частиц необходимый прирост энергии оказывается фантастически большим. А для ускорения электронов микротроны с успехом применяются и позволяют получать почти непрерывные пучки большой интенсивности.

Упражнения

1. В технике линейных ускорителей длину трубок дрейфа выражают не через период электромагнитных колебаний, а через длину их волны. При этом вместо скорости частиц v вводят относительную скорость $\beta = v/c$, где c — скорость света. Получите соответствующую формулу.

2. Рассчитайте величину pc для протонов с кинетической энергией $K = 20$, 200 и 2000 *Мэв* при помощи соотношения Эйнштейна

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4.$$

В этой формуле E — полная энергия, равная $K + m_0c^2$. Покажите, что формула

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K(K + 2m_0c^2)},$$

которой мы пользовались, эквивалентна этому соотношению. (Напоминаем, что для протонов $m_0c^2 = 938$ *Мэв*.)

3. Фазотрон в Дубне ускоряет протоны до энергии 680 *Мэв*. Во сколько раз должна измениться частота ускоряющего высокочастотного поля за время ускорения? Считать, что магнитное поле от радиуса не зависит.

4. Покажите, что для успешной работы микротрона нужно, чтобы при каждом прохождении ускоряющего промежутка частица приобретала энергию m_0c^2 (или несколько m_0c^2).

Задачи наших читателей

1. Даны две окружности с радиусами R и r. Их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярны. Найти площадь треугольника, образованного этими касательными и общей внешней касательной к данным окружностям.

Ж. Лев (г. Черновцы)

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $|AD|=a$, $|BC|=b$. Прямая l параллельна основаниям и пересекает сторону AB в точке M, сторону CD в точке N, причем $(MC) \parallel (AN)$. Найти $S_{AMCN} : S_{ABCD}$.

В. Ленкарев (г. Луховицы)

3. Решите следующие уравнения ($\overline{xy}$ — число, записанное цифрами x, y и т.п.):

а) $\overline{xy} \cdot \overline{0,yz} = 1$;

б) $\frac{1}{x} = 0,1\overline{xxx}\ldots$,

в) $\overline{xx} \cdot \overline{yy} = \overline{(x-1)\,xx\,(x-1)}$.

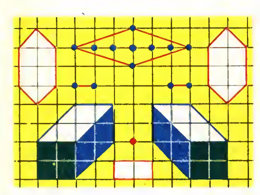
И. Михалкович (Минская обл.)

4. Найти все действительные корни уравнения $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 1977x^{1976} = 0$.

П. Парамонов (г. Москва)

А. Кушниренко

Целые точки в многоугольниках и многогранниках



В этой статье мы будем заниматься многоугольниками, все вершины которых лежат в целых точках координатной плоскости — в узлах клетчатой бумаги. Пусть F — такой многоугольник, а $S(F)$ — его площадь. Если $N(F)$ — число узлов, попавших внутрь и на границу многоугольника F, то $S(F) \approx N(F)$. Для $S(F)$ есть и точные формулы, например, формула Пика («Квант», 1974, № 12):

$$S(F) = N(F) - B(F)/2 - 1,$$

где $B(F)$ — число узлов, попавших на границу F.

Формула Пика обладает одним недостатком: она не имеет прямого аналога в пространстве. Приведенный на рисунке 1 пример показывает, что объем $V(F)$ многогранника F с вершинами в узлах кубической решетки нельзя выразить через $N(F)$ — число узлов, попавших внутрь и на границу F, и через $B(F)$ — число узлов, попавших на границу F. Можно, однако, придумать похожие формулы, которые прекрасно обобщаются на пространственный случай.

В этой статье будет построена небольшая теория, которая позволяет *угадать и доказать* все мыслимые аналоги формулы Пика на плоскости и в пространстве *).

*) См. задачу М385, «Квант», 1976, № 5.

Такие формулы понадобились автору этих строк при решении математической проблемы, о которой будет кратко рассказано в § 1.

§ 1. Введение

Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где P и Q — многочлены от x, y с действительными коэффициентами?

Чтобы ответить на этот вопрос, для каждого одночлена $x^m y^n$, входящего с ненулевым коэффициентом хотя бы в один из многочленов P или Q, отметим на координатной плоскости точку с координатами $(m; n)$. Возьмем *выпуклую оболочку* отмеченных точек — наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все отмеченные точки. Этот многоугольник называется *многоугольником Ньютона* *) системы (1). Его удобно рисовать на клетчатой бумаге.

Решив пару десятков систем вида (1), я стал подозревать, что справедлива такая

Теорема 1. *Число ненулевых решений системы* (1) *либо бесконечно, либо не превосходит удвоенной площади ее многоугольника Ньютона.*

*) Подробнее мы расскажем о многоугольниках Ньютона в июньском номере нашего журнала.

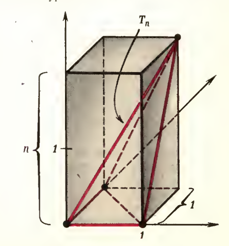


Рис. 1. $N(T_n) = 4$, $B(T_n) = 4$, $V(T_n) = n/6$.

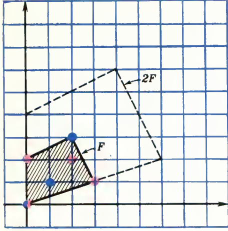


Рис 2. $N(F)=9$, $N(2F)=28$, $B(F)=5$, $S(F)=5{,}5$.

(Решение (x_0, y_0) называется ненулевым, если $x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$.) Пытаясь доказать теорему 1, я почти доказал, что справедлива похожая на нее

Теорема 2. *Число ненулевых решений системы* (1) *либо бесконечно, либо не превосходит* $N(2F) - 2N(F) + 1$, *где* $2F$ *— многоугольник, полученный из* F *растяжением в два раза относительно начала координат* (рис. 2).

Чтобы окончить довольно длинное доказательство теоремы 2, мне оставалось показать, что

а) для любого целочисленного многоугольника F *функция* $N(nF)$ *— многочлен второй степени от* n *при целых* $n \geqslant 0$ (я называю многоугольник целочисленным, если его вершины лежат в узлах).

Пытаясь понять, какая из теорем — 1 или 2 — сильнее, я убедился что

б) для любого целочисленного многоугольника

$$2S(F) = N(2F) - 2N(F) + 1,$$

т. е. теоремы 1 и 2 по существу совпадают.

Оказывается, что и *а*) и *б*) в два счета выводятся из формулы Пика.

Упражнение 1. Выведите *а*) и *б*) из формулы Пика.

Задача 1. Сформулируйте аналог теоремы 1 для системы уравнений $P(x, y, z) = Q(x, y, z) = R(x, y, z) = 0$ и аналог формулы *б*) для многогранников. Придуманную формулу проверьте, глядя на рисунок 3.

$2S(F) = N(2F) - 2N(F) + 1$

§ 2.

Мы начнем построение обещанной выше теории с того, что честно докажем эту простую формулу. Обозначим ее правую часть через $P(F)$. Покажем, что если целочисленный многоугольник F разбит диагональю I на многоугольники F_1 и F_2, для которых формула *б*) верна, то она верна и для F. Действительно, так как $N(F) = N(F_1) + N(F_2) - N(I)$, то и $P(F) = P(F_1) + P(F_2) - P(I)$. Очевидно, что $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$. Поэтому $2S(F) = 2S(F_1) + 2S(F_2) = P(F_1) + P(F_2) = P(F) + P(I)$. Легко проверить непосредственно, что для любого целочисленного отрезка I (т. е. отрезка, концы которого — целые точки) $P(I) = 0$. Значит, $2S(F) = P(F)$. Таким образом, из справедливости *б*) для треугольников по индукции вытекает справедливость *б*) для n-угольников: целочисленный четырехугольник можно разрезать на два целочисленных треугольника, пятиугольник — на четырехугольник и треугольник и т. д.

Формулу *б*) легко проверить непосредственно для прямоугольников, составленных из целых клеток (рис. 4). Возьмем «половинку» такого прямоугольника F — прямоугольный треугольник F_1. Мы уже знаем, что $2S(F) = P(F)$. По симметрии $S(F_1) = S(F_2) = S(F)/2$ и $P(F_1) = P(F_2)$. Так как $P(I) = 0$, то $P(F) = 2P(F_1)$, откуда $2S(F_1) = P(F_1)$. Таким образом, формула *б*) доказана нами

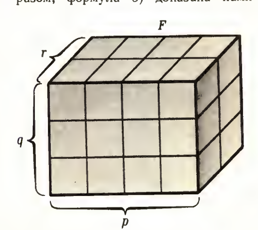


Рис 3. $N(F) = (p+1)(q+1)(r+1)$, $B(F) = N(F) - (p-1)(q-1)(r-1)$, $V(F) = pqr$.

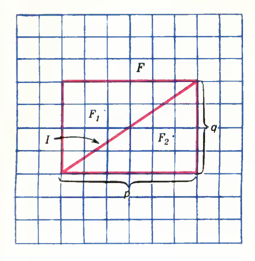


Рис. 4 $N(F)=(p+1)(q+1)$, $N(2F)=(2p+1)(2q+1)$, $S(F)=pq$.

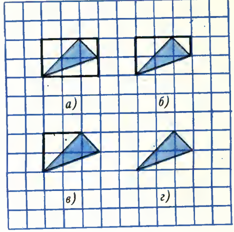


Рис. 5.

для прямоугольных треугольников (с катетами, параллельными осям).

Произвольный целочисленный треугольник можно получить, последовательно отрезая от подходящего прямоугольника прямоугольные треугольники (рис. 5). Значит, формула *б*) верна для любого целочисленного треугольника, что и оставалось доказать.

§ 3. Как мы будем обобщать рассуждения из § 2

Для того, чтобы доказать другие формулы, например, формулу Пика, мы могли бы повторять рассуждения § 2 и *доказывать совпадение двух функций, определенных на множестве всех целочисленных многоугольников*. В § 2 такими функциями были $2S(F)$ и $P(F)$ для доказательства формулы Пика мы взяли бы $S(F)$ и $N(F)—B(F)/2—1$ и т. д. Такой подход плох по трем причинам. Во-первых — это очень скучно. Во-вторых — так можно доказывать уже угаданные формулы, но нельзя придумать новые. В третьих — действуя таким образом, мы никогда не будем уверены в том, что получили все интересные формулы.

В духе аксиоматического подхода, выработанного математикой XX века, мы постараемся сразу описать весь класс функций, к которым применимы рассуждения § 2. Для этого нужно хорошенько проанализировать решение задачи *б*). Стандартная схема такого анализа в нашем случае выглядит так:

Ш а г 1. Нужно перечислить те свойства функций, определенных на множестве целочисленных многоугольников, которые использовались при решении исходной задачи.

Ш а г 2. Нужно изучить все функции, обладающие этими свойствами. (Мы назовем их *удобными.)*

Ш а г 3. Нужно доказать *критерий совпадения* удобных функций и описать все удобные функции. (Критерий должен быть простым, и его применение должно сразу решать исходную задачу.)

Ш а г 4. Нужно применить полученный критерий для обобщения исходной задачи.

§ 4. Замечательные функции на множестве плоских целочисленных фигур

Одними многоугольниками не обойтись

Читатель, вероятно, уже заметил, что в рассуждениях § 2 встречались не только многоугольники, но и отрезки.

О п р е д е л е н и е. *Плоской целочисленной фигурой* (*или просто фигурой*) *мы будем называть целую точку, целочисленный отрезок или целочисленный многоугольник. Множество всех плоских целочисленных фигур обозначим через Ф.*

Мы будем рассматривать отображения множества $Ф$ в множество действительных чисел — функции на множестве $Ф$.

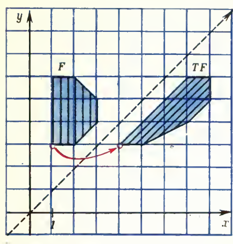


Рис. 6. «Перекос». $T(x;\ y)=(x+y;\ y)$; $T(1;\ 3)=(4;\ 3)$.
Каждая горизонтальная прямая $\{(x;\ y)|y=c\}$ под действием «перекоса» T сдвигается сама по себе на расстояние c. Каждая вертикальная прямая «перекашивается» подобно оси y, которая переходит в пунктирную прямую.

Шаг 1 — какие функции на Φ мы будем рассматривать.

Функцию f на множестве Φ будем называть *аддитивной*, если она обладает следующим свойством:

А) *если целочисленные фигуры* F, F_1, F_2 *таковы, что* $F=F_1 \cup F_2$, *а* $F_1 \cap F_2$ — *точка или отрезок, то*

$$f(F) = f(F_1) + f(F_2) - f(F_1 \cap F_2).$$

Введем на плоскости координаты x, y. *Допустимыми* будем называть преобразования четырех типов:

1°. параллельные переносы на целочисленный вектор $(a;\ b)$: $T(x;\ y)=(x+a;\ y+b)$;

2°. симметрии: $T(x;\ y)=(\pm x;\ \pm y)$;

3°. перестановку координат: $T(x;\ y)=(y;\ x)$;

4°. «перекосы»: $T(x;\ y)=(x+ay;\ y)$, где a — произвольное целое число (рис. 6).

Функция f на множестве Φ называется *инвариантной относительно преобразования* T, если для любой фигуры $F \in \Phi$ выполнено равенство $f(TF)=f(F)$.

Функцию f будем называть *инвариантной*, если она инвариантна относительно любого допустимого преобразования.

Упражнение 2. Докажите, что функция R, принимающая на любой целой точке значение 0, на любом целочисленном отрезке значение 2, а на любом целочисленном n-угольнике — значение n, инвариантна, но не аддитивна.

Основное определение. *Функцию f на множестве Φ будем называть удобной, если она аддитивна и инвариантна.*

Примеры удобных функций

Множество всех удобных функций на Φ мы обозначим через У. Удобные функции существуют. Например, функция E, сопоставляющая каждой целочисленной фигуре число 1, является удобной. Очевидно, что функция N, сопоставляющая каждой целочисленной фигуре F число $N(F)$, является удобной. Ясно, что функция S — аддитивна. Очевидно также, что $S(TF)=S(F)$ для любой фигуры F и для любого допустимого преобразования T типов 1°—3°. Интуитивно очевидная инвариантность функции S относительно «перекосов» следует из принципа Кавальери (см. «Алгебра и начала анализа 10», п. 107). Значит, функция S — удобная. Из уже известных удобных функций можно получать новые по следующему правилу.

Упражнение 3. Для любой фигуры $F \in \Phi$ обозначим через nF фигуру, полученную из F растяжением в n раз относительно начала координат. Докажите, что если $f \in$ У, то функция f_n, сопоставляющая каждой фигуре F число $f(nF)$, также является удобной.

В частности, функция N_n, сопоставляющая фигуре F число $N(nF)$, является удобной.

Задача 2. Докажите, что всякая удобная функция f обладает следующим свойством:

Б) *f принимает одинаковое значение на всех целочисленных отрезках I таких, что $N(I)=2$.*

Заметим, что выбор аксиом, описывающих множество удобных функций, является в значительной степени произвольным. Мы предпочли такой набор аксиом, который легче всего обобщается на трехмерный случай; но можно было бы обойтись и меньшим числом аксиом. Вот пример.

Задача 3. Обозначим через У′ множество аддитивных функций, инвариантных относительно преобразований типа 1°—2° и обладающих свойством Б). Докажите, что У′ = У.

Эту задачу стоит решать после того, как будут найдены все удобные функции.

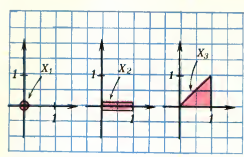


Рис. 7.

Шаг 2 — изучаем удобные функции.

Если f и g — удобные функции, а c и d — действительные числа, то функция $cf+dg$, которая, по определению, принимает на фигуре F значение $c\,f(F)+dg(F)$, очевидно, является удобной.

Итак, с удобными функциями можно обращаться как с векторами: их можно умножать на действительные числа и складывать. Положим, например, $P=N_2-2N+E$ (т. е. $P(F)=N(2F)-2N(F)+1$). Так как функции N_2, N и E — удобные, то и функция P — удобная.

Сопоставим теперь каждой удобной функции $f \in У$ вектор в трехмерном пространстве, а именно, вектор $(f(X_1);\ f(X_2);\ f(X_3))$, где X_1, X_2, X_3 — три целочисленные фигуры, изображенные на рисунке 7. Этот вектор мы будем обозначать через $\vec{f}$. В первых пяти строках таблицы 1 записано, какие векторы сопоставляются уже известным нам удобным функциям.

Таблица 1

	f	$f(X_1)$	$f(X_2)$	$f(X_3)$
1	S	0	0	1/2
2	N	1	2	3
3	E	1	1	1
4	N_2	1	3	6
5	P	0	0	1
6	?	0	2	3
7	$e_1=2E+2S-N$	1	0	0
8	$e_2=N-E-4S$	0	1	0
9	$e_3=2S$	0	0	1

А всякий ли вектор соответствует какой-нибудь удобной функции (например, вектор (0; 2; 3) из шестой строки)? Положительный ответ на этот вопрос дают строки 7—9 таблицы 1. Из них видно, что удобным функциям e_1, e_2, e_3 соответствуют базисные векторы в трехмерном пространстве. Поэтому для любых чисел c_1, c_2, c_3 мы можем указать удобную функцию, которой соответствует вектор $(c_1;\ c_2;\ c_3)$, а именно — удобную функцию $c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$. Например, вектор из шестой строки таблицы 1 соответствует функции $2e_2+3e_3=2(N-E-4S)+3\cdot 2S=2N-2E-2S$.

Шаг 3 — критерий совпадения удобных функций.

До сих пор мы нигде не пользовались тем, что имеем дело с удобными функциями. Любой функции на Φ можно было бы таким же способом сопоставить вектор трехмерного пространства. Например, функции R из упражнения 2 соответствует вектор из шестой строки таблицы 1. Особое «удобство» удобных функций заключается в том, что между ними и векторами трехмерного пространства имеется *взаимно однозначное соответствие*. Иными словами, *если f и g удобные функции и если $\vec{f}=\vec{g}$, то функции f и g совпадают.*

Обозначим разность $f-g$ через h. Тогда утверждение о взаимной однозначности соответствия между удобными функциями и векторами примет такой вид.

Основная теорема. *Если $h \in У$ и вектор $\vec{h}$ равен нулю, то и функция h есть тождественный нуль.*

Мы рекомендуем читателю доказать основную теорему самостоятельно или прочесть доказательство в приложении к статье.

Из основной теоремы сразу следует формула *б*). Действительно, из первой и пятой строк таблицы 1 мы получаем, что вектор, соответствующий функции $P-2S$ — нулевой. Так как функция $P-2S$ удобная, то по основной теореме $P-2S=0$, т. е. $P(F)-2S(F)=0$ для любой фигуры F.

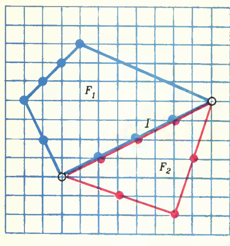


Рис 8. $F = F_1 \cup F_2$.

Еще один пример удобной функции

Можно ли применить основную теорему для доказательства формулы Пика? Беда в том, что функция B определена пока лишь на множестве н а с т о я щ и х целочисленных многоугольников. Как определять ее на отрезках и точках? Если мы хотим *продолжить B до удобной функции на Φ*, то из рисунка 8 видно, что нам следует положить $B(I) = B(F_1) + B(F_2) - B(F)$, и из этого же рисунка ясно, что правая часть этого равенства есть $2 + 2 \cdot$(*число неконцевых точек отрезка I*). Наконец, если X — точка, то по тем же причинам нам следует положить $B(X) = 0$.

У п р а ж н е н и е 4 (устное). Докажите, что определенная выше функция B действительно является удобной.

Докажем теперь формулу Пика. Из определения функции B вытекает, что вопросительный знак в шестой строке таблицы 1 можно заменить на B. Но выше мы выяснили, что эта строка соответствует функции $2N - 2E - 2S$. Значит, по основной теореме, $N - E - B/2 = S$.

В о п р о с — п р е д о с т е р е ж е н и е. Почему из равенства $\vec{R} = \vec{B}$, где R — функция из упражнения 2, не вытекает, что $R = B$?

Шаг 4 — обобщаем формулу б) и формулу Пика.

Пусть e, f, g, h — четыре удобные функции, $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ — соответствующие им четыре вектора в пространстве. Один из них всегда можно представить как сумму трех других с действительными коэффициентами. По основной теореме то же верно и для исходных функций. Выбирая в качестве e, f, g, h различные удобные функции (определенные чисто геометрически), мы будем получать новые геометрические формулы. Выразим, например, $B(F)$ через $N(F)$ и $N(2F)$. Возьмем четыре удобные функции B, E, N, N_2. Будем искать числа c_1, c_2, c_3, c_4 такие, что $B = c_1E + c_2N + c_3N_2$. Эта задача сводится к решению следующей системы уравнений (см. таблицу 1):

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + c_3, \\ 2 = c_1 + 2c_2 + 3c_3, \\ 3 = c_1 + 3c_2 + 6c_3. \end{cases}$$

Решая ее, получим $c_1 = -3$, $c_2 = 4$, $c_3 = -1$, т. е. $\vec{B} = 4\vec{N} - \vec{N}_2 - 3\vec{E}$. Значит, для любого целочисленного многоугольника F

$$B(F) = 4N(F) - N(2F) - 3.$$

У п р а ж н е н и я

5. Выразите $N(3F)$ через $N(F)$ и $N(2F)$.

6. Пусть $p(n) = N(nF) = a + bn + cn^2$. Докажите, что число внутренних целых точек в многоугольнике nF равно $p(-n)$. Попробуйте сформулировать аналогичное утверждение в трехмерном случае.

§ 5. Замечательные функции на множестве пространственных целочисленных фигур

Целочисленной фигурой (*или просто фигурой*) *в трехмерном пространстве мы назовем целую точку, целочисленный отрезок, целочисленный многоугольник или целочисленный многогранник*. Множество целочисленных фигур обозначим, как и в двумерном случае, через Φ.

Строгое определение удобной функции на множестве Φ мы дадим в «Приложении». Сейчас для нас будет важно только то, что функции E, N, N_n, V окажутся удобными. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — точки трехмерного пространства с координатами (0; 0; 0), (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1). Пусть X_1 — точка A_1, X_2 — отрезок A_1A_2, X_3 — треугольник $A_1A_2A_3$, X_4 — тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$.

Каждой удобной функции f сопоставим четверку чисел — ее значения на фигурах X_1, X_2, X_3, X_4. Какие четверки получаются для известных нам функций V, E, N, N_2, N_3 показано в строках 1—5 таблицы 2.

Предположим еще, что для удобных функций на множестве Φ справедливо о б о б щ е н и е основной теоремы из § 4:

Если h — удобная функция на Φ, и $h(X_1) = h(X_2) = h(X_3) = h(X_4) = 0$, то функция h есть тождественный нуль.

	f	$f(X_1)$	$f(X_2)$	$f(X_3)$	$f(X_4)$
1	V	0	0	0	1/6
2	E	1	1	1	1
3	N	1	2	3	4
4	N_2	1	3	6	10
5	N_3	1	4	10	20
6	B	2	2	3	4

Таблица 2

Постарайтесь придумать такое определение удобных функций на Φ, чтобы функции E, N, N_n, V оказались удобными и чтобы была справедлива пространственная основная теорема. Сравните ваше определение с определением на с. 20.

Пользуясь обобщенной основной теоремой и таблицей 2, получаем формулу

$$6V = N_3 - 3N_2 + 3N - E,$$

аналогичную формуле *б*).

Для того, чтобы получить из основной теоремы аналог формулы Пика, доопределим функцию B, которая пока определена только на настоящих многогранниках:

если F — многоугольник, то мы положим $B(F)$ = (число граничных точек F) + + 2·(число внутренних точек F);

если F — отрезок или точка, то мы положим $B(F) = 2$.

Упражнение **7**. Покажите, что если фигура F покрыта двумя фигурами F_1 и F_2, пересекающимися по многоугольнику M (рис. 9), то

$$B(F) + B(M) = B(F_1) + B(F_2).$$

Задача **4**. Докажите, что функция B удобная.

Снова пользуясь обобщенной основной теоремой и таблицей 2, получаем одно из возможных обобщений формулы Пика:

$$6V(F) = N(2F) - 2N(F) - B(F) + 3.$$

Точно также можно доказать и многие другие формулы.

Упражнение **8**. Докажите, что $B(2F) = 4B(F) - 6$ для любого целочисленного многогранника F.

Упражнение **9**. Выразите $N(4F)$ через $N(F)$, $N(2F)$ и $N(3F)$.

Задача **5**. 1) Вычислите явно числа $N(nX_1)$, $N(nX_2)$, $N(nX_3)$, $N(nX_4)$.

2. Покажите, что $N_n = c_1E + c_2N + c_3N_2 + c_4N_3$.

3) Докажите, что для $F \in \Phi$ функция $N_n(F)$ — многочлен не более, чем третьей степени от n (при целых $n \geqslant 0$).

4) Покажите, что коэффициенты этого многочлена — удобные функции от n, и выясните геометрический смысл коэффициентов при n^3 и n^2.

Задача **6***. Докажите обобщенную основную теорему.

§ 6. Приложение

Доказательство основной теоремы.

Если X — целая точка, то параллельным переносом ее можно перевести в точку X_1. Поэтому $h(X) = h(X_1) = 0$.

Если I — целочисленный отрезок и $N(I) = 2$, то согласно решению задачи 2 $h(I) = h(X_1) = 0$.

Если $N(I) > 2$, то разобьем отрезок I точкой X на два отрезка I_1 и I_2 такие, что $N(I_1) < N(I)$, $N(I_2) < N(I)$. Согласно А), $h(I) = h(I_1) + h(I_2) - h(X) = h(I_1) + h(I_2)$. Применяя индукцию, получаем, что $h(I) = 0$ для любого отрезка I.

Пусть теперь F — произвольный целочисленный многоугольник. Разбивая F диагональю I на два многоугольника F_1 и F_2 с меньшим, чем у F, числом сторон, мы получаем, согласно А), что $h(F) = h(F_1) + h(F_2) - h(I) = h(F_1) + h(F_2)$. Применяя индукцию, получаем, что достаточно доказать равенство $h(F) = 0$ для любого целочисленного треугольника F. Из свойства А) и рисунка 5 следует, что это равенство будет справедливо, если h обращается в нуль на всех прямоугольниках со сторонами, параллельными осям координат, и на всех прямоугольных треугольниках (с катетами, параллельными осям координат).

Оказывается, если h обращается в нуль на прямоугольниках со сторонами, параллельными осям координат, то h обращается в нуль и на прямоугольных треугольниках с катетами, параллельными осям координат. Действительно, разобьем такой прямоугольник F диагональю I на треугольники F_1 и F_2. Тогда $h(F) = h(F_1) + h(F_2)$. Предположим, что $h(F) = 0$, тогда $h(F_1) + h(F_2) = 0$. Докажем, что $h(F_1) = h(F_2)$. Пусть F_1' — треугольник, симметричный F_1 относительно одной из координатных осей, а F_2' — треугольник, симметричный F_2 относительно другой координатной оси. Поскольку h инвариантна относительно симметрий, получаем $h(F_1) = h(F_1')$, $h(F_2) = h(F_2')$. Но F_1' можно перевести в F_2 па-

Рис. 9.

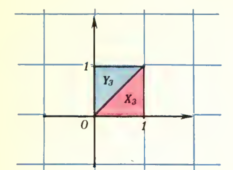




Рис. 10.

$I_{c,b}$ $I_{a,b}$

Рис. 11.

раллельным переносом, поэтому $h(F_1') = h(F_2')$. Отсюда $h(F_1) = h(F_2)$ и, значит, $h(F_1) = h(F_2) = 0$.

Осталось показать, что h обращается в нуль на прямоугольниках со сторонами, параллельными координатным осям. Разбивая такой прямоугольник на меньшие прямоугольники, мы получаем по индукции, что достаточно доказать обращение h в нуль на единичном квадрате $X_3 \cup Y_3$, изображенном на рисунке 10. Согласно А), $h(X_3 \cup Y_3) = h(X_3) + h(Y_3)$. По условию теоремы $h(X_3) = 0$. Выше мы доказали, что $h(Y_3) = h(X_3)$, поэтому и $h(Y_3) = 0$. Отсюда $h(X_3 \cup Y_3) = 0 + 0 = 0$. Доказательство теоремы закончено.

Решение задачи 2.

Будем говорить, что фигуры F_1 и F_2 *эквивалентны* (обозначается: $F_1 \sim F_2$), если фигура F_1 получается из фигуры F_2 цепочкой допустимых преобразований. Ясно, что всякая удобная функция принимает одинаковое значение на эквивалентных фигурах. Обозначим через $I_{a,b}$ отрезок с концами $(0; 0)$ и $(a; b)$. Покажем, что всякий отрезок $I_{a,b}$ эквивалентен отрезку $I_{n,0}$. Преобразованием 1° любой отрезок I переводится в $I_{a,b}$. Сделав преобразования 2° и 3°, можно считать, что $a \geq b \geq 0$. Если $b > 0$, то рассмотрим все отрезки, которые можно получить из $I_{a,b}$ с помощью «перекосов». Из рисунка 11 видно, что среди таких отрезков обязательно есть отрезок $I_{c,b}$, где $0 \leq c < b$. Сделав 3°, получаем, что $I_{a,b} \sim I_{b,c}$. Повторив несколько раз те же рассуждения, мы получим, что $I \sim I_{n,0}$. Если дополнительно известно, что $N(I) = 2$, то $N(I_{n,0}) = 2$, т. е. $n = 1$. Таким образом, удобная функция f на любом отрезке I, для которого $N(I) = 2$, принимает такое же значение, как и на отрезке $I_{1,0}$.

Определение удобных функций на Φ в пространственном случае.

Аддитивность. Функцию f на множестве Φ назовем *аддитивной*, если

А) *для любого разбиения фигуры* $F \in \Phi$ *на фигуры* $F_1, \ldots, F_k \in \Phi$, *удовлетворяющего условиям* $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \neq \varnothing$ и $V(F_i \cap F_j) = 0$ *при* $i \neq j$, *выполнено равенство*

$$f(F) = \sum_{1 \leq i \leq k} f(F_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k} f(F_i \cup F_j) + \ldots$$
$$\ldots - (-1)^k f(F_1 \cap \ldots \cap F_k).$$

Примеры.

1) Функция V аддитивна, так как если $V(F_i \cap F_j) = 0$ при $i \neq j$, то $V(F_1 \cup \ldots \cup F_k) = V(F_1) + \ldots + V(F_k)$.

2) Аддитивность функции E следует из тождества $1 = C_k^1 - C_k^2 + \ldots - (-1)^k C_k^k$ (вытекающего из равенства $(1-1)^k = 0$).

3) Аддитивность функции N следует из так называемой «формулы включений и исключений» (см. «Квант», 1974, № 2, с. 13).

Инвариантность. Введем в пространстве координаты x, y, z. *Допустимыми* будем называть преобразования четырех типов:

1°. параллельные переносы на целочисленный вектор $(a; b; c)$:

$T(x; y; z) = (x + a; y + b; z + c)$;

2°. симметрии:

$T(x, y, z) = (\pm x; \pm y; \pm z)$;

3°. перестановку координатных осей:

$T(x; y; z) = (y; z; x)$;

4°. «перекосы»:

$T(x; y; z) = (x + ay + bz; y + cz; z)$,

где a, b, c — произвольные целые числа.

Функцию f на множестве Φ назовем *инвариантной*, если *для любой фигуры* $F \in \Phi$ *и любого допустимого преобразования* T *выполнено равенство* $f(TF) = f(F)$.

Инвариантность функций E, N, N_n, B, B_n очевидна. Инвариантность функции V следует из пространственного принципа Кавальери.

Основное определение. *Функция f на множестве Φ называется удобной, если она аддитивна и инвариантна.*

Ясно, что функции E, V, N_n, B_n — удобные.

В «Кванте» № 2 за 1977 год помещено письмо десятиклассника Б. Ивякина и ответ на это письмо члена-корреспондента АН СССР А. И. Ширшова.
В своем ответе Анатолий Илларионович Ширшов, в частности, указал, что всегда можно «натолкнуться на интересные математические идеи. Они (эти идеи) вокруг нас». Редакция попросила Анатолия Илларионовича проиллюстрировать это положение каким-либо примером из элементарной математики.

Об уравнении $C_n^m = C_{n+1}^{m-1}$

А. Ширшов



К уравнению, указанному в заглавии, я пришел, рассматривая 14-ю строку треугольника Паскаля:

1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1.

О треугольнике Паскаля рассказывается в пунктах 7 и 8 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9».

Коротко расскажем о нем тем, кто с ним еще не знаком.

В n-й строке треугольника Паскаля на m-м месте стоит число C_n^m, причем нумерация как строк, так и чисел в каждой строке начинается с нуля (первые 15 строк треугольника Паскаля приведены на рисунке).

Для понимания статьи достаточно о числах C_n^m знать только одно:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \qquad (1)$$

($n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$; $0! = 1$). Из (1) легко выводится

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}. \qquad (2)$$

С помощью этого соотношения можно строить треугольник Паскаля, не пользуясь формулой (1) (см. рисунок).

В 14-й строке бросается в глаза, что $1001 + 2002 = 3003$, то есть

$$C_{14}^4 + C_{14}^5 = C_{14}^6.$$

Ввиду (2) это равенство можно переписать так:

$$C_{15}^5 = C_{14}^6. \qquad (3)$$

Равенство (3) показывает, что пара $\langle 6, 14\rangle$ является решением уравнения, указанного в заглавии.

А какие еще пары чисел являются решением этого уравнения? В статье дается ответ на этот вопрос. Чтобы ответ имел более красивую форму, заменим в нашем уравнении m на y, а n — на $x-1$. Тогда верна такая

Т е о р е м а. *Все решения уравнения $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$ имеют вид*

$x_k = \gamma_{2k}\gamma_{2k+1}$; $y_k = \gamma_{2k-1}\gamma_{2k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, *где γ_n — n-й член последовательности Фибоначчи*)*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Воспользуемся формулой (1) и перепишем наше уравнение:

$$\frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} = \frac{(x-1)!}{y!\,(x-y-1)!}.$$

После очевидных преобразований оно приводится к такому виду:

$$(x-y+1)\,(x-y) = xy. \qquad (4)$$

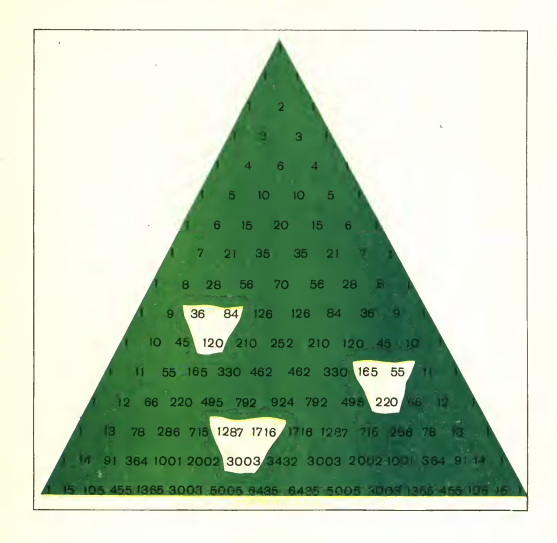
Обозначим через w наибольший общий делитель чисел x и y. Тогда $x = uw$, $y = vw$, где u и v взаимно просты. Подставив выражения для x и y в (4), после сокращения на w получим, что

$$(u-v)\,[(u-v)\,w+1] = uvw. \qquad (5)$$

Числа u и v взаимно просты. Поэтому $u-v$ и uv тоже взаимно просты. Взаимно просты и числа w и $(u-v)w+1$. Но тогда должны выполняться такие равенства:

$$\begin{cases} (u-v)\,w + 1 = uv, \\ u - v = w. \end{cases}$$

*) Для этой последовательности $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2}$ для $n > 2$.



Эта система равносильна такой системе:

$$\begin{cases} v^2 + vw - w^2 = 1, \\ v + w = u. \end{cases} \qquad (6)$$

Поэтому решение нашего уравнения сводится к решению уравнения

$$v^2 + vw - w^2 = 1 \qquad (7)$$

в натуральных числах.

2. Сделаем три простых замечания о решениях уравнения (7). Пусть пара $\langle v, w\rangle$ является решением уравнения (7). Тогда

а) v и w взаимно просты;

б) если $v = w$, то $v = w = 1$;

в) $v \leqslant w < 2v$;

г) пары $\langle v+w, v+2w\rangle$ и $\langle 2v-w, w-v\rangle$ являются решением уравнения.

Напоминаем, что v и w — натуральные числа.

в) вытекает из равенства $w = \frac{v + \sqrt{5v^2-4}}{2}$, получающегося, если (7) рассмотреть как уравнение относительно w, а г) можно проверить, подставив соответствующие пары в уравнение (7).

С помощью преобразования

$$\langle v, w\rangle \Rightarrow \langle v+w, v+2w\rangle, \qquad (*)$$

исходя из решения $\langle 1, 1\rangle$, построим последовательность решений $\langle 2, 3\rangle$, $\langle 5, 8\rangle$, $\langle 13, 21\rangle$, $\langle 34, 55\rangle$, ... Выписанные решения имеют вид

$$v_k = \gamma_{2k-1}, \; w_k = \gamma_{2k}. \qquad (8)$$

Докажем, что других решений уравнение (7) не имеет. Допустим, что пара $\langle \bar{v}, \bar{w}\rangle$ является решением уравнения (7). Докажем, что она является одной из пар (8).

Если $\bar{v} \neq \bar{w}$, то с помощью преобразования

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle \Rightarrow \langle 2\bar{v} - \bar{w}, \bar{w} - \bar{v} \rangle \qquad (**)$$

перейдем от этой пары к паре $\langle \bar{v}_1, \bar{w}_1 \rangle$ с меньшими компонентами. Если $\bar{v}_1 \neq \bar{w}_1$, то проделаем такой переход еще раз. Если $\bar{v}_2 \neq \bar{w}_2$, еще раз... Каждый раз мы будем получать пару меньших натуральных чисел. Поэтому после конечного числа шагов мы получим пару $\langle \bar{v}_l, \bar{w}_l \rangle$ из одинаковых чисел — по нашим правилам процесс может оборваться только на такой паре. Но, как мы уже знаем, тогда $\bar{v}_l = \bar{w}_l = 1$. Заметим теперь, что переходы (*) и (**) взаимно обратны: если $\bar{v} = 2v - w$, $\bar{w} = w - v$, то $v = \bar{v} + \bar{w}$, $w = \bar{v} + 2\bar{w}$. Поэтому наша пара $\langle v, w \rangle$ может быть получена из пары $\langle 1, 1 \rangle$ с помощью (*) за l шагов, то есть $\langle v, w \rangle = \langle v_l, w_l \rangle$.

Итак, множество решений уравнения (7) состоит из пар $\langle \gamma_{2k-1}, \gamma_{2k} \rangle$.

3. Теперь мы можем подвести итоги: $u_k = v_k + w_k = \gamma_{2k+1}$, значит, $x_k = u_k v_k = \gamma_{2k}\gamma_{2k+1}$, $y_k = v_k w_k = \gamma_{2k-1}\gamma_{2k}$. Теорема доказана.

4. Последнее замечание. Если мы захотим проверить наше решение и посмотреть, какому k соответствует 14 строка, то окажется, что $k=2$. А чему же соответствует $k=1$? Не получили ли мы лишнего решения? $k=1$ соответствует равенство $C_2^0 = C_1^1$, но стоящих подряд трех чисел как будто не видно. Однако на самом деле они есть, просто первое из них — нуль — не написано.

Историческая справка. Рассматриваемое уравнение уже встречалось в математической литературе, правда, в несколько иной форме. (The American Mathematical Monthly, т. 37, с. 508, автор задачи — Norman Anning.) Решение ее, опубликованное в томе 38, с. 351, ничего общего ни по методам, ни по форме ответа не имеет с решением, приведенным в этой заметке.

Задачи наших читателей

1. По дороге едут с одинаковыми скоростями две одинаковые автомашины. Одна машина везет тяжелый груз, а другая идет порожняком. Если машины одновременно начнут тормозить так, что пойдут «юзом» (колеса у них не будут крутиться), то какая из них остановится раньше?

Б. Коган (Москва)





2. Однородный стержень закреплен в центре тяжести так, что он может легко вращаться в вертикальной плоскости. К концам стержня прикреплены одинаковые грузы. Такая система в любом положении находится в состоянии равновесия. А рычажные весы, на обеих чашках которых лежат одинаковые грузы, устанавливаются только горизонтально. Как вы думаете, почему?

Е. Гудесблат (Одесса)

3. Доказать, что если в треугольнике ABC для длин a, b, c его сторон выполняются неравенства $c > b > a$ и β_A, β_B, β_C — длины биссектрис внутренних углов, β'_A, β'_B, β'_C — длины биссектрис внешних углов, h_a, h_b, h_c — длины высот, то справедливы следующие равенства:

а) $$\frac{1}{a\beta_A\beta'_A} + \frac{1}{c\beta_C\beta'_C} = \frac{1}{b\beta_B\beta'_B};$$

б) $$\frac{h_a}{\beta_A\beta'_A} + \frac{h_c}{\beta_C\beta'_C} = \frac{h_b}{\beta_B\beta'_B}.$$

У. Алла (г. Выру)



Наблюдения над утренней чашкой кофе

В. Шефер



Эта статья заимствована нами из журнала «Успехи физических наук» (1972 г., том 108, выпуск 3).
Автор статьи Винсент Дж. Шефер является директором Исследовательского центра по изучению атмосферы при Университете штата Нью-Йорк в Олбэни, США.
Статья печатается с некоторыми сокращениями.

Внимательные наблюдения над повседневными явлениями позволяют узнать многое о природе физических процессов.

Можно наблюдать много чрезвычайно интересных химических и физических явлений, если чашку очень горячего черного кофе осветить сильным пучком света, параллельным поверхности жидкости. Первый раз я наблюдал эти явления, глядя вдоль края кипящих источников зимой в Йеллоустонском парке*). Через несколько лет я обнаружил их вновь за утренней чашкой кофе, вскоре после восхода Солнца. На этот раз все происходило в сухом воздухе Северной Аризоны.

В Йеллоустоне наблюдение было часто затруднено влагой, поднимающейся от горячей воды, которая конденсировалась в воздухе и бо́льшую часть времени скрывала от глаз наблюдателя поверхность жидкости. В Аризоне, наоборот, чистый воздух раннего утра и яркий свет восходящего Солнца создавали идеальные условия для наблюдения интересных эффектов, к описанию которых я и хочу приступить.

Если наполнить чашку до краев черным кофе (быстрорастворимым или обычным), близким к закипанию, и посмотреть на него при подходящем освещении, то первое, что бросится в глаза, это причудливые ячейки, которые образуются на поверхности кофе под поднимающимся паром (см. рисунок). Ячейки поперечным размером от 1 до 3 *см* имеют форму неправильных многоугольников и выглядят как пыльные светлые пятна, ограниченные узкими темными линиями. Пятнами отмечаются места выхода на поверхность восходящих потоков горячей жидкости. Затем эти потоки растекаются по поверхности, слегка охлаждаются и в тех местах, которые отмечены темными линиями, вновь погружаются внутрь кофе, образуя структуру, известную под названием вихревых ячеек Бенара.

Эти ячейки присутствуют во всех жидкостях и газах в тех случаях,

*) Йеллоустонский Национальный парк известен своими горячими источниками и особенно гейзерами. (*Прим. перев.*)

если их нижние слои имеют более высокую температуру, чем верхние. Не важно, чем создан такой перепад температуры: тем ли, что жидкость подогревается снизу или охлаждается сверху,— существенно только, чтобы температура уменьшалась снизу вверх. Явление может проявляться в самых разных масштабах. Француз Анри Бенар, который в 1900 году впервые заметил его, пользовался для наблюдений микроскопом*). Однако это явление можно видеть и в облаках над землей, и на поверхности воды в морях, и даже в структуре фотосферы Солнца.

На поверхности горячего кофе ячейки Бенара хорошо видны благодаря следующему явлению. Интенсивный поток молекул водяного пара, поднимающегося от горячей поверхности кофе, действует на непосредственно прилегающие к поверхности жидкости слои более холодной атмосферы с силой, направленной вверх. Бо́льшая часть водяных капель, конденсирующихся в насыщенном влагой воздухе, либо опускается назад в жидкость, либо поднимается в атмосферу и испаряется в ней. Однако имеются и такие капельки, которые слишком велики, чтобы подняться в верхние слои воздуха, и одновременно — слишком малы, чтобы их сила тяжести могла преодолеть давление восходящего потока молекул воды, поднимающихся с поверхности горячей жидкости. В результате сила тяжести этих сконденсированных капелек уравновешивается силой давления вылетающих с поверхности жидкости молекул, так что капельки оказываются взвешенными в воздухе над поверхностью горячего кофе. На границах же ячеек Бенара имеется нисходящий поток пара, капельки оседают, и здесь черная поверхность кофе обнажается. Если воспользоваться микроскопом, обладающим небольшим увеличением, то можно заметить, что пылевидные пятна над восходящими потоками горячего кофе состоят из плотно упакованных крошечных однородных водяных капелек. Размеры капелек и высота их локализации над уровнем жидкости определяются давлением паров воды, числом центров конденсации в данном объеме и силой тяжести.

То, что число и размеры капелек определяются наличием центров конденсации, можно доказать с помощью зажженной спички, поднесенной ниже края чашки. Пламя спички создает, как известно, дополнительные центры конденсации*), в результате чего концентрация капелек резко уменьшается, размеры их становятся заметно меньше, и они локализуются ближе к поверхности горячей жидкости.

Если поверхность жидкости осветить ярким горизонтальным параллельным пучком света (например, лучами восходящего Солнца, световым пучком из проектора для диапозитивов или из яркого фонаря) и вести наблюдение в направлении освещения и близко к оси светового пучка, то над поверхностью темной жидкости можно увидеть спектрально разложенный свет. Явление дифракции света на мелких капельках в высоких слоях атмосферы приводит иногда к появлению окраски венцов вокруг Солнца или Луны, когда они закрываются облаками, состоящими из почти однородных капелек**).

Искусный и настойчивый экспериментатор может заметить также характерное и довольно любопытное электрическое явление. Если к поверхности жидкости поднести наэлектризованный предмет (например, эбонитовую гребенку), то взвешенные в воздухе капельки влаги исчезают. Это показывает, что капельки сильно заряжены. Если же наэлектризованный предмет заряжен не очень

*) При отсутствии посторонних возмущений на поверхности жидкости видна почти правильная сетка шестиугольных завихрений, причем по оси каждой ячейки жидкость поднимается, а вдоль ее внешних границ стекает вниз. (*Прим. ред.*)

*) Под действием пламени спички часть молекул воздуха ионизируется. Образовавшиеся ионы действуют как центры конденсации. (*Прим. ред.*)

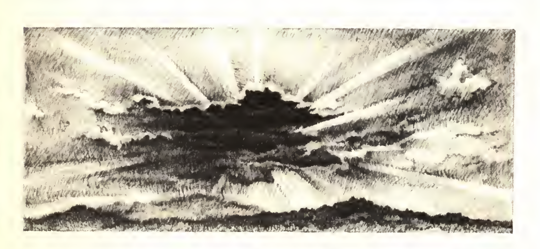
**) Более подробно о явлении дифракции света на мелких капельках можно прочитать, например, в книге М. Миннарта «Свет и цвет в природе» (М., «Наука», 1969 г., с. 222 и далее). Заметим только, что дифракция света на капле происходит точно так же, как на круглом отверстии в экране. (*Прим. ред.*

сильно, то одновременно с наличием вблизи поверхности жидкости стабильной зоны уравновешенных капелек возникает поток капелек, конденсирующихся на ионах, распространяющихся от заряженного тела.

Чашка горячего кофе является идеальным прибором для наблюдения всех или некоторых из описанных явлений. Однако по мере остывания кофе эффекты быстро ослабевают. Для более продолжительных наблюдений я пользовался следующим устройством. Чисто вымытая жестянка из-под консервов наполнялась водой, подкрашенной черными чернилами, и подогревалась на горячей подставке. В качестве горячей подставки служил электрический утюг, перевернутый вниз ручкой, которая зажималась в настольные тиски. Это приспособление позволяло проводить наблюдения сколь угодно долго. Прекрасным источником света служил проектор для показа диапозитивов, а наблюдать расположение, размеры и другие характеристики «плавающих» капелек можно было в микроскоп. Впоследствии я обнаружил, что горячий глицерин еще лучше подходит для продолжительных исследований.

Грязь на поверхности жидкости в некоторых случаях может подавить интересующие нас эффекты, однако ее легко удалить. Для этого к поверхности жидкости нужно прикоснуться кусочком газетной или другой бумаги и тут же его убрать. Загрязняющая поверхность жидкости мономолекулярная пленка постороннего вещества (или пыль) высадится на поверхности бумаги и останется на ней. Для очистки поверхности горячей жидкости может потребоваться несколько таких операций, выполняемых каждый раз с новым куском бумаги. Разумеется, не представляет т руда намеренно загрязнять поверхн ость кофе или другой жидкости для того, чтобы исследовать влияние постороннего молекулярного покрытия на описанные явления.

Начать опыты, по-видимому, лучше всего с глицерином или с подкрашенной чернилами водой, не расходуя кофе.



«Иззаоблачное» сияние

Когда в солнечный день на небе бывают облака, нередко можно наблюдать следующее явленне: от солнца, закрытого облаком, в разные стороны расходятся пучки лучей. По мере удаления от облака пучкн постепенно расширяются. Если их мысленно продолжнть за облако до взаимного пересечення, то онн «сойдутся» в том месте, где находнтся солнце.

В то же время известно, что лучн от солнца ндут на землю почтн параллельно (угловой днаметр солнца около 30′).

Почему же лучн от солнца, закрытого облаком, так шнроко расходятся? И почему столь заметно расшнрение отдельных световых лучей «нззаоблачного» сняния?

А. Митрофанов



И. Яглом

О хордах непрерывных кривых

Обобщая понятие хорды окружности, *хордой* произвольной кривой α мы будем называть любой отрезок, концы которого принадлежат α. Например, у кривой α, изображенной на рисунке 1, хордами являются не только отрезки PQ и RS, но и составляющий часть кривой α отрезок TU.

1. О задаче М413

В этой задаче («Квант», 1976, № 11) предлагалось выяснить, для каких положительных чисел a верно следующее утверждение: *для любой функции f, определенной на отрезке* $[0, 1]$, *непрерывной в каждой точке этого отрезка и такой, что* $f(0)=f(1)=0$, *уравнение*

$$f(x+a)-f(x)=0 \qquad (1)$$

имеет решение.

Решим ее. Перепишем уравнение (1) в равносильной форме

$$f(x+a)=f(x). \qquad (2)$$

Мы считаем (см. условие задачи), что в уравнениях (1), (2) $a>0$, а функция f определена на отрезке $[0, 1]$, непрерывна в каждой точке этого отрезка и $f(0)=f(1)=0$.

График α функции f — это непрерывная кривая, соединяющая точки $A\langle 0, 0\rangle$ и $B\langle 1, 0\rangle$. График β функции $y=f(x+a)$ получается параллельным переносом кривой α вдоль оси абсцисс влево (поскольку $a>0$) на a (рис. 2).

Существование решения у уравнения (2) означает, что графики α и β пересекаются: если $f(x_0+a)=f(x_0)=y_0$, то точка с координатами $\langle x_0, y_0\rangle$ принадлежит и α, и β (рис. 3).

Оказывается, для того чтобы кривые α и β пересекались, необходимо и достаточно, чтобы у α была параллельная оси абсцисс хорда длины a. Это утверждение вытекает из такой леммы (докажите ее самостоятельно):

Лемма. *Кривая α, соединяющая точки A и B, тогда и только тогда имеет параллельную AB хорду длины r, когда кривая β, полученная из α параллельным переносом в направлении BA на расстояние r, пересекается с α.*

Таким образом, мы можем «перевести» задачу М413 на «язык хорд»: требуется выяснить, при каких положительных *a график любой функции f, определенной на отрезке* $[0, 1]$, *непрерывной в каждой точке этого отрезка и такой, что* $f(0)=f(1)=0$, *имеет параллельную оси абсцисс хорду длины a.*

2. «Плохие» числа: $a\neq\frac{1}{n}$.

Покажем, что для любого положительного a, не равного $\frac{1}{n}$ ($n=1, 2, 3, 4, \ldots$), существует функция описанного вида, график которой не имеет параллельной оси абсцисс хорды длины a.

Очевидно, у любой такой функции для любой хорды CD ее графика, параллельной оси абсцисс, $|CD|\leqslant|AB|=1$ (рис. 4). Поэтому можно дальше считать, что $0<a<1$.

Если $\frac{1}{2}<a<1$, проведем через A и B любые прямые $u_1 \| u_2$ и через середину R_1 отрезка AB — любую пересекающую их прямую v_1. Легко видеть, что функция f_2, графиком которой является ломаная $\alpha_2=AP_1Q_1B$ (рис. 5),— искомая, поскольку для любой хорды CD ее графика, параллельной оси абсцисс, $|CD|\leqslant\frac{1}{2}$ или $|CD|=1$.

Пусть теперь $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$. Разделим отрезок AB точками R_1, R_2 на три равные части и, независимо от этого, точкой S_1— пополам. Проведем

через A, S_1 и B любые параллельные между собой прямые $u_1 \| u_2 \| u_3$ и через R_1, R_2 — любые пересекающие их параллельные между собой прямые $v_1 \| v_2$. Функция f_3, графиком которой является ломаная $\alpha_3 = AP_1Q_1P_2Q_2B$ (рис. 6), — искомая: для любой хорды CD ее графика, параллельной оси абсцисс, либо $|CD| \leqslant \frac{1}{3}$, либо $|CD| \geqslant \frac{1}{2}$. В самом деле. Если точки C и D лежат на соседних звеньях ломаной α_3 (т. е. на AP_1 и P_1Q_1 или на P_1Q_1 и Q_1P_2 и т. д.), то, очевидно, $|CD| \leqslant \frac{1}{3}$. Если точки C и D лежат «через одно звено», то либо $|CD| = \frac{1}{3}$ (когда $C \in P_1Q_1$, $D \in P_2Q_2$), либо $|CD| = \frac{1}{2}$. В остальных случаях $|CD| > \frac{1}{2}$.

Аналогично строится ломаная α_n (график функции f_n), соединяющая A и B и не содержащая никакой параллельной оси абсцисс хорды CD такой, что $\frac{1}{n} < |CD| < \frac{1}{n-1}$. Разделим отрезок AB точками $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ на n равных частей и, независимо от этого, точками $S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$ — на $n-1$ равных частей. Проведем через $A, S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$ и B любые параллельные между собой прямые $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и через $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ — любые пересекающие их параллельные между собой прямые $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$. Ломаная $\alpha_n = AP_1Q_1P_2Q_2 \ldots P_{n-1}Q_{n-1}B$ (на рисунке 7 изображена ломаная α_6) — искомая. Устанавливается это опять-таки перебором различных возможных положений точек C и D (проверьте!).

Упражнение 1. Проверьте, что при $n = 2, 3, 4, \ldots$ график функции g_n:

$$g_n(x) = \sin(2\pi(n-1)x)$$

на отрезке $[0, 1]$ не имеет параллельной оси абсцисс хорды длины $\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n-1}$.

Нарисуйте этот график.

Упражнение 2. Докажите, что при любом положительном a, не равном $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$, график функции h_a:

$$h_a(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\right) \cdot x$$

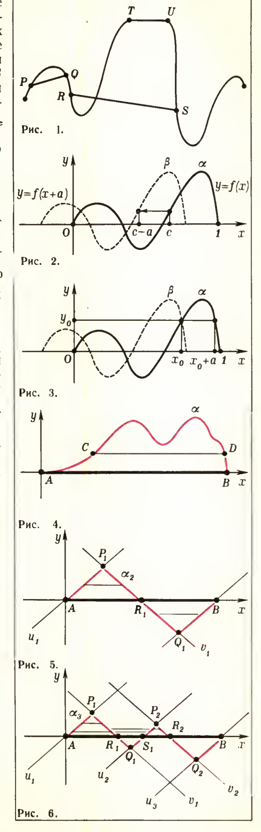


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 5.

Рис. 6.

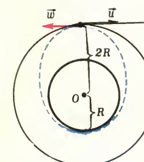


Рис. 9.

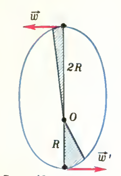


Рис. 10.

Определим значения $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$.

Скорость спутника определим из условия движения по круговой орбите. Центростремительное ускорение спутнику сообщает сила притяжения к Земле:

$$\frac{Mu^2}{2R}=\gamma\frac{M_0M}{4R^2}$$

(M_0 — масса Земли). Отсюда

$$|\vec{u}|=\sqrt{\gamma\frac{M_0}{2R}}.$$

Полная механическая энергия станции в момент старта равна $\frac{mv^2}{2}-\gamma\frac{M_0m}{2R}$. По мере удаления от Земли потенциальная энергия станции увеличивается, и далеко от Земли (на бесконечности) она равна нулю. Минимальная скорость, которую имеет станция в момент старта, должна быть такой, чтобы уменьшение кинетической энергии станции за время полета было равно увеличению ее потенциальной энергии. Тогда на бесконечности и кинетическая энергия станции будет равна нулю. Следовательно, в момент старта полная механическая энергия станции должна быть равна нулю, т. е.

$$\frac{mv^2}{2}-\gamma\frac{M_0m}{2R}=0.$$

Отсюда

$$|\vec{v}|=\sqrt{\gamma\frac{M_0}{R}}.$$

Определим значение $|\vec{w}|$. Согласно второму закону Кеплера радиус-вектор «остатка», движущегося по эллиптической орбите, за равные времена заметает равные площади. Если в перигее скорость остатка $\vec{w}'$ (рис. 10), то за малый промежуток времени Δt

$$2R|\vec{w}|\Delta t=R|\vec{w}'|\Delta t \qquad (4)$$

(время Δt достаточно мало, чтобы считать, что $|\vec{w}|$, $|\vec{w}'|$ и длины радиусов-векторов остаются постоянными).

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{\mu w^2}{2}-\gamma\frac{M_0\mu}{2R}=\frac{\mu(w')^2}{2}-\gamma\frac{M_0\mu}{R}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) найдем $|\vec{w}|$:

$$|\vec{w}|=\sqrt{\gamma\frac{M_0}{3R}}.$$

Подставив найденные значения $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ и $|\vec{w}|$ в выражение (3), окончательно получим

$$\frac{m}{M}\approx 0{,}8.$$

В. Белонучкин

А. Земляков

Четные и нечетные функции

«В мир согласный,
Вечно — ясный,
Чет и нечет нас влечет»
К. Бальмонт

Эта статья адресована девятиклассникам и является иллюстрацией и дополнением к пункту 68 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9».

Четные функции

Напомним, что числовая функция f называется *четной*, если выполнены следующие два условия:

(С) *если* $x \in D(f)$, *то и* $-x \in D(f)$, то есть область определения $D(f)$ функции f симметрична относительно точки 0 на координатной прямой Ox;

(Ч) $f(-x) = f(x)$ *для любого* $x \in D(f)$, то есть в симметричных (относительно точки 0 на оси Ox) точках x и $-x$ функция f принимает одинаковые значения.

Примеры четных функций: постоянная c ($y = c$ при любом $x \in \mathbf{R}$), x^2, $\cos x$.

График четной функции на координатной плоскости Oxy симметричен относительно оси ординат. Доказывается это так. Если точка M с координатами $(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции f (рис. 1), то есть $f(x_0) = y_0$, то, по определению четной функции, $-x_0 \in D(f)$ и $f(-x_0) = y_0$, а потому и точка M' с координатами $(-x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции f. Но точка M' как раз симметрична точке M относительно оси Oy. Таким образом, вместе со всякой точкой M график четной функции f содержит и симметричную ей точку M', а это и означает, что этот график симметричен относительно оси ординат.

Верно и обратное: если график функции f симметричен относительно оси ординат, то функция f — четная.

Четные функции обладают «хорошими» алгебраическими свойствами: сумма, разность и произведение двух четных функций тоже являются четными функциями (докажите это самостоятельно).

Нечетные функции

Функция f называется *нечетной*, если выполнено условие симметрии (С) (см. выше) и следующее условие нечетности:

(Н) $f(-x) = -f(x)$ *для любого* $x \in D(f)$.

Примеры нечетных функций: $2x$, x^3, $1/x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$.

График нечетной функции на координатной плоскости Oxy симметричен относительно начала координат O — докажите это самостоятельно с помощью рисунка 2. Верно и обратное утверждение (сформулируйте и докажите его самостоятельно).

Легко видеть, что сумма и разность двух нечетных функций, а так-

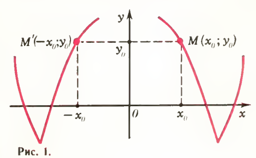


Рис. 1.

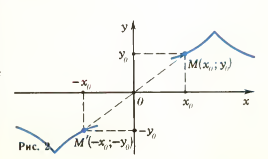


Рис. 2.

же произведение нечетной функции на число являются нечетными функциями.

Контрольные вопросы

1. Четной или нечетной функцией является произведение двух нечетных функций?
2. Какой функцией является произведение четной и нечетной функций?

Ни четные, ни нечетные функции

Отметим, что «нечетная функция» — это отнюдь не то же самое, что «не четная функция» (то есть функция, не являющаяся четной). Как правило, функция, «взятая наугад», не будет ни четной, ни нечетной: график «произвольной» функции не обязан обладать какими-либо свойствами симметрии.

Пример 1. Функция $f(x) = 1/(x+1)$ не является ни четной, ни нечетной, поскольку для ее области определения $D(f) = \{x \mid x \neq -1\}$ не выполнено условие симметрии (С): точка $x_0 = 1$ принадлежит $D(f)$, а точка $-x_0 = -1$ не принадлежит $D(f)$.

Пример 2. Функция $f(x) = x^2 + x + 1$ также не является ни четной, ни нечетной. Эта функция определена всюду, и поэтому условие симметрии (С) для нее выполнено, однако ни условие (Ч), ни условие (Н) не выполнено. В самом деле, $f(-x) = x^2 - x + 1$. Положив $x = 1$, находим

$$f(1) = 1 + 1 + 1 = 3,$$
$$f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1,$$

и $f(-1)$ не равно ни $f(1)$, ни $-f(1)$.

Замечание. Ссылка на то, что выражения для $f(x)$ и $f(-x)$ «разные», поэтому «$f(-x) \neq f(x)$», ничего не доказывает: во-первых, совсем разные по своему внешнему виду выражения могут задавать одну и ту же функцию; во-вторых, предложение «$f(-x) \neq f(x)$» содержит переменную x, и его истинность или ложность зависит от значения x (например, в рассматриваемом примере при $x = 0$ как раз $f(-x) = f(x)$). Условие (Ч) четности функции заключается в истинности высказывания

«для любого $x \in D(f)$ выполнено числовое равенство $f(-x) = f(x)$»,

а утверждение о том, что условие (Ч) не выполняется, заключается в истинности высказывания, являющегося отрицанием предыдущего:

«существует $x \in D(f)$ такое, что $f(-x) \neq f(x)$».

Таким образом, чтобы опровергнуть условия (Ч) или (Н), нужно доказать существование соответствующего значения x — например, указать конкретное такое значение.

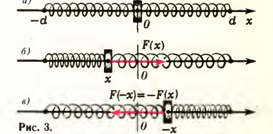


Рис. 3.

Возникает вопрос: зачем вводить понятия четности и нечетности функций, если «большинство» функций не являются ни четными, ни нечетными? Это мы сейчас и объясним.

Физический пример

Если физическая система обладает какой-нибудь симметрией, то и связанные с нею функции часто имеют те или иные свойства симметрии. В простейших случаях возникают как раз четные или нечетные функции.

Пример. На горизонтальный стержень — ось Ox — надета однородная пружина, концы которой закреплены в симметричных точках $x = -d$ и $x = d$, а к середине пружины — в точке $x = 0$ — прикреплена шайба, свободно (без трения) перемещающаяся вдоль стержня (рис. 3, *а*). Пусть шайба отведена в точку с координатой x. Обозначим через $F(x)$ величину силы, действующей на шайбу со стороны пружины (точнее говоря, проекцию этой силы на ось Ox), а через $U(x)$ — потенциальную энергию шайбы в этом положении. Очевидно, пружине безразлично, вправо или влево отводится шайба: абсолютная величина силы и потенциальная энергия при смещениях x и $-x$ одинаковы, то есть

$$|F(-x)| = |F(x)|$$

и

$$U(-x) = U(x).$$

Учитывая, что сила в положениях x и $-x$ направлена в противоположные стороны (см. рис. 3, *б*, *в*), можем записать

$$F(-x) = -F(x).$$

Таким образом, из одних лишь соображений симметрии мы получаем следующее:

1) функция $F(x)$, выражающая зависимость силы F от смещения x, нечетная;

2) функция $U(x)$, выражающая зависимость потенциальной энергии от смещения, четная.

Математический пример

Очевидно, степенная функция $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbf{N}$, при четном n будет четной, а при нечетном n — нечетной (собственно, отсюда и появилась эта терминология). Произвольный многочлен $p(x)$, вообще говоря, не будет ни четной, ни нечетной функцией *). Однако его можно представить в виде суммы двух многочленов $p_+(x)$ и $p_-(x)$, являющихся соответственно четной и нечетной функциями. Например,

$$p(x) = x^7 + 2x^6 - x^5 - 3x^4 - 13x^2 + x + 17 = p_+(x) + p_-(x),$$

где

$$p_+(x) = 2x^6 - 3x^4 - 13x^2 + 17$$

— сумма одночленов из $p(x)$, содержащих x в четной степени, а

$$p_-(x) = x^7 - x^5 + x$$

— сумма одночленов из $p(x)$, содержащих x в нечетной степени.

Оказывается, что не только многочлен, но и любую функцию с симметричной областью определения можно представить в виде суммы четной и нечетной функций!

Теорема

Если функция f удовлетворяет условию симметрии (C), то ее можно представить в виде суммы двух функций — четной $f_+(x)$ и нечетной $f_-(x)$:

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x), \qquad (1)$$

области определения которых те же, что у функции f: $D(f_+) = D(f_-) = D(f)$, причем такое представление единственно.

Доказательство. Допустим, что функция $f(x)$ уже представлена в виде (1) и функции f_+ и f_- удовлетворяют соотношениям

$$f_+(-x) = f_+(x), \quad f_-(-x) = -f_-(x). \qquad (2)$$

Подставив в формулу (1) вместо x значение $-x$, из формул (2) получим

$$f(-x) = f_+(x) - f_-(x). \qquad (3)$$

Складывая равенства (1) и (3), получаем

$$f(x) + f(-x) = 2f_+(x),$$

откуда

$$f_+(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}. \qquad (4а)$$

Аналогично, вычитая (3) из (1), находим

$$f_-(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \qquad (4б)$$

Таким образом, если функция f представима в виде (1), то функции f_+ и f_- однозначно отыскиваются по функции f — с помощью формул (4). Следовательно, если представление (1) существует, то оно единственно.

А теперь — небольшой трюк: для произвольной функции f определим функции f_+ и f_- соотношениями (4).

Тогда из формул (4) следует, что, во-первых, $f_+(x) + f_-(x) = f(x)$, то есть (1) выполняется, и, во-вторых, что функции f_+ и f_- являются, соответственно, четной и нечетной. Например, проверим условие (Н) для функции f_-. Для произвольного x имеем

$$f_-(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_-(x),$$

что и требовалось доказать. Четность функции f_+ проверяется точно так же.

Замечание. Приведенное доказательство носит, как говорят, конструктивный характер: мы не только доказали существование и единственность представления (1), то и указали формулы (4), по которым можно найти четную и нечетную «части» данной функции.

Контрольные вопросы

3. Где в доказательстве использовано предположение о симметричности $D(f)$?

4. Согласно нашей теореме любая функция с симметричной областью определения, в том числе и любая четная (или нечетная) функция, представляется в виде суммы четной и нечетной частей. Найдите функции f_+ и f_-, если

а) f — четная функция;

б) f — нечетная функция.

*) Здесь и далее рассматриваются многочлены от одной переменной x, причем многочлен $p(x)$ мы отождествляем с функцией $x \to p(x)$.

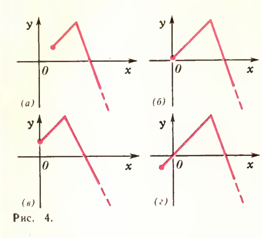


Рис. 4.

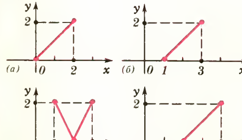


Рис. 5.

5. В «математическом примере» мы разложили некоторый многочлен $p(x)$ в сумму четной и нечетной функций, «собрав» в одну функцию все одночлены, содержащие x в четной степени, а в другую — одночлены, содержащие x в нечетной степени.

Выведите это разложение с помощью формул (4).

6. Докажите, что если некоторый многочлен является

а) четной функцией, то он содержит одночлены лишь с четными степенями x;

б) нечетной функцией, то он содержит одночлены лишь с нечетными степенями x.

Упражнения

1. Даны 11 функций: $f_1(x) = \sqrt{x^2-1}$, $f_2(x) = \sqrt{x+1}$, $f_3(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $f_4(x) = x^2 + \sin x$, $f_5(x) = x^2 \cdot 2^x$, $f_6(x) = x^3 + x^4 - x^2$, $f_7(x) = x^3 + \cos x$, $f_8(x) = x^3 + \operatorname{tg} x$, $f_9(x) = x^3 \cdot \sin x$, $f_{10}(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, $f_{11} = \lg\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Определите, какие из этих функций — четные, какие — нечетные, а какие — ни четные, ни нечетные (тогда представьте их в виде суммы четной и нечетной функций). Дайте соответствующие доказательства. (При обосновании тех или иных свойств четности не забудьте про замечание после примера 2!)

2. Найдите все четные и все нечетные функции среди:

а) линейных функций
$$f(x) = ax + b;$$

б) квадратичных функций
$$f(x) = ax^2 + bx + c;$$

в) функций вида
$$f(x) = a \cos x + b \sin x.$$

3. Следующие функции представьте в виде суммы четной и нечетной функций:

а) $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x} + 2$;

б) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x}$;

в) $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \operatorname{tg} x$;

г) $f(x) = 2^x$.

4. Известно, что функция f нечетна и $0 \in D(f)$. Найдите $f(0)$.

5. Найдите все функции f, являющиеся одновременно и четными и нечетными. (Предостережение: таких функций бесконечно много!)

6. Существуют ли всюду определенные функции, являющиеся одновременно

а) четными и возрастающими на **R**;

б) нечетными и убывающими на **R**;

в) нечетными и положительными на **R**?

7. Может ли

а) четная;

б) нечетная

функция иметь в точности

1) одну;

2) две;

3) три

точки экстремума?

8. а) Докажите, что производная четной функции нечетна, а производная нечетной функции, напротив, четна.

б) Верны ли обратные утверждения:

1) если $f'(x)$ — четная функция, то $f(x)$ — нечетная функция;

2) если $f'(x)$ — нечетная функция, то $f(x)$ — четная функция?

9 (*а* — *г*). Достройте график функции, изображенный на рисунке 4, до графика всюду определенной, непрерывной на **R** и

1) четной функции;

2) нечетной функции.

В каких случаях это невозможно? В каких случаях это можно сделать несколькими способами?

10 (*а*—*г*). Известно, что функция f всюду определена, четна и периодична с периодом $T = 4$. Восстановите ее график по участку, изображенному на рисунке 5. В каких случаях это нельзя сделать? В каких случаях это можно сделать, но неоднозначно?

11 (10 класс). Постройте графики следующих функций:

а) $y = \arccos(\cos x)$;

б) $y = \arcsin(\sin x)$;

в) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

г) $y = \arcsin(\cos x)$.

Равноугольная спираль

На второй странице обложки изображены два семейства конгруэнтных между собой равноугольных спиралей (точнее — вписанных в них ломаных из хорд).

Равноугольная спираль*) может быть определена как траектория точки M, которая движется по лучу, равномерно вращающемуся вокруг точки O (полюса спирали), причем ее суммарная скорость в каждый момент образует с лучом один и тот же угол α (рис. 1). Спираль эта имеет бесконечно много витков не только при раскручивании, но и при закручивании.

По этой спирали летят на пламя свечи ночные бабочки. Из-за сложного устройства глаз они направляются к цели так, что их скорость составляет постоянный угол с направлением на пламя свечи. По этой спирали моллюск наращивает секции своей раковины (рис. 2).

Равноугольная спираль используется в разнообразных технических устройствах. Например, вращающиеся ножи в режущих машинах часто имеют профиль, очерченный по равноугольной спирали — под постоянным углом к разрезаемой поверхности, благодаря чему лезвие ножа снашивается равномерно (рис. 3).

Вернувшись к рисунку на обложке, вы заметите, что спирали одного семейства на нем могут быть совмещены друг с другом поворотом относительно центра всей фигуры (он же — полюс каждой из спиралей) на угол $k\frac{\pi}{6}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Еще раз всмотревшись в тот же рисунок, вы заметите переходящие друг в друга в результате гомотетии относительно общего центра четырехугольники (каждый из них есть объединение двух треугольников — равностороннего и равнобедренного прямоугольного). Равноугольная спираль при гомотетии относительно полюса также переходит сама в себя.

*) Равноугольную спираль называют также логарифмической.

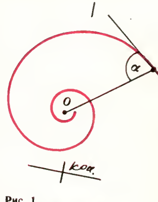


Рис. 1.

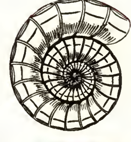


Рис. 2.

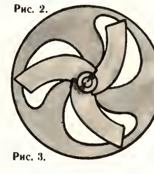


Рис. 3.

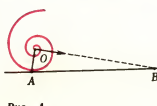


Рис. 4.

Вот эти два свойства равноугольной спирали (то, что она при вращении и гомотетии переходит сама в себя) настолько восхитили Я. Бернулли*), что он распорядился выгравировать ее изображение на своем надгробном памятнике. Особенности этой замечательной кривой привлекали многих выдающихся математиков. Первыми из них были Э. Торричелли**) и Р. Декарт (1596—1650)***).

Э. Торричелли, кстати, выяснил удивительный факт. Оказывается, несмотря на бесконечное число витков, длина дуги логарифмической спирали от произвольной ее точки A до полюса O конечна.

Действительно, обратимся к рисунку 4. Пусть равноугольная спираль катится без скольжения по своей касательной AB. Полюс спирали O будет тогда перемещаться под прямым углом к AO и, в конце концов, попадет в точку B. А дуга AO прокатится без скольжения по AB. Поэтому длина дуги AO равна $\frac{|OA|}{\cos\alpha}$.

А теперь задача: требуется найти полюс равноугольной спирали, если известны направления касательных в трех известных ее точках.

В. Березин

*) См. «Лемниската Бернулли», «Квант», № 1, 1977.

**) См. «Строфоида», «Квант», 1977, № 2.

***) Рене Декарт — математик, физик, философ. Родился он во Франции в городе, носящем ныне его имя. Декарт — создатель «всеобщей математики», которая, по его замыслу, должна была стать универсальным средством исследования в науках о природе. В его работах получил развитие метод исследования, опирающийся на разностороннее использование алгебраических уравнений. Из «всеобщей математики» выросли алгебра и аналитическая геометрия. Книги Р. Декарта многие десятилетия являлись настольными для творчески работающих математиков.



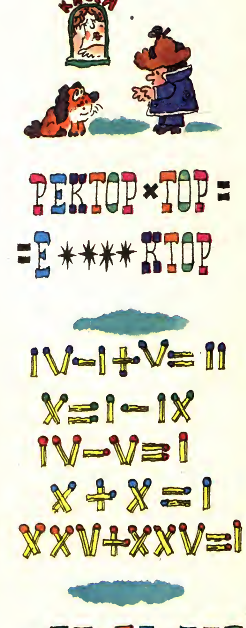
Задачи

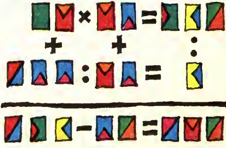
1. Коле для поездок в метро и на трамвае требовалось разменять некоторую сумму денег, получив ее всю монетами по 3 и 5 копеек. Коля подсчитал, что всего существует k способов такого размена. Какая наибольшая сумма денег могла быть у Коли?

2. В примере на умножение некоторые цифры зашифрованы буквами (см. рисунок): одинаковые цифры — одинаковыми буквами, разные — разными, на месте звездочек могут стоять любые цифры, в том числе и зашифрованные буквами. Попробуйте расшифровать пример!

3. На рисунке вы видите пять «равенств», сложенных из спичек. Но все эти «равенства» — неверные. Переложите в каждом из них по одной спичке, чтобы все «равенства» стали действительно равенствами.

4. В этом ребусе (см. рисунок) цифры зашифрованы фигурками. Одинаковым фигуркам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, ни одно число не начинается нулем. Расшифруйте ребус.





Е. Пальчиков

Почему в холодильнике сохнут продукты?



Говоря точнее, надо было бы вопрос сформулировать так: «*Почему в холодильнике продукты обычно сохнут быстрее, чем на открытом воздухе?*» Давайте попробуем в этом разобраться.

Начнем с двух — безусловно, известных вам — фактов:

1) *Холодный воздух тяжелее теплого* (вспомните, пожалуйста, — почему?).

2) *Чем теплее воздух, тем больше в нем может присутствовать воды в виде пара.* Как это можно объяснить?

Воздух, как правило, соприкасается с какими-нибудь открытыми водоемами. В воде при любой температуре найдутся такие молекулы, которые сумеют вылететь с поверхности воды и образовать водяной пар. Одновременно с процессом испарения происходит и обратный переход молекул из пара в жидкость (конденсация). Очевидно, чем больше плотность пара, тем активнее идет процесс конденсации. Если испарение воды происходит в ограниченном объеме (например, в закрытом сосуде), то обязательно наступит момент, когда число молекул, покидающих жидкость, сравняется с числом молекул, возвращающихся обратно. В таком случае говорят, что между жидкостью и ее паром наступает равновесие (количества жидкости и пара больше не изменяются). Пар в этом состоянии называют *насыщенным*, подчеркивая тем самым, что при неизменных условиях дальнейшее испарение уже невозможно.

Ясно, что чем выше температура, тем интенсивнее испаряется вода и тем большей, следовательно, должна быть плотность водяного пара, чтобы наступило равновесие. Другими словами, чем выше температура, тем больше водяных паров может содержаться в данном объеме воздуха. Например, при 20°С в комнате с площадью 12 $м^2$ и высотой 3 *м* может находиться в виде пара около 600 *г* воды, а при 100°С — около 20 *кг*!

Степень влажности воздуха (содержание в воздухе того или иного количества водяных паров) обычно характеризуют с помощью специальной физической величины — относительной влажности. *Относительной влажностью воздуха* называется отношение массы водяных паров, содержащихся в 1 $м^3$ воздуха, к максимальной массе паров воды, которая может находиться в этом объеме при данной температуре. Это отношение принято выражать в процентах. Если количество водяных паров в воздухе не изменяется, а температура воздуха повышается, то относительная влажность будет уменьшаться. И на-

оборот: при охлаждении воздуха его относительная влажность увеличивается. Как только она станет равной 100%, водяные пары начнут конденсироваться, «лишний» пар будет превращаться в росу или иней.

Теперь проследим, как же себя ведет воздух внутри холодильника. У всех холодильников морозильная камера расположена наверху. Охлажденный возле камеры воздух опускается вниз. Соприкасаясь со стенками холодильника и с продуктами, он нагревается. При этом его относительная влажность уменьшается, а способность вбирать в себя воду увеличивается. Нагревшись и отобрав часть воды у продуктов, воздух поднимается к морозильной камере. Здесь он охлаждается до первоначальной температуры, но влажность его оказывается выше первоначальной (из-за отобранной у продуктов воды). Через некоторое число циклов влажность воздуха возрастает настолько, что, подойдя к морозильной камере, он будет вынужден часть воды оставить на камере в виде «осадка» — капелек воды или кристалликов льда.

Так с помощью воздуха вода «перекочевывает» от более теплых тел к более холодным — от продуктов к морозильной камере. При этом происходит очень эффективная перекачка тепла: при испарении некоторое количество теплоты отбирается от продуктов и передается воздуху, а при конденсации оно отбирается от воздуха и передается морозильной камере. Разумеется, вода легче будет отбираться у более нагретых тел. Например, для испарения 1 *г* воды при температуре 0 С требуется количество теплоты около $2{,}59 \cdot 10^3$ *дж*, а при 50°С — $2{,}38 \cdot 10^3$ *дж*. (Столько же тепла выделяется при конденсации.)

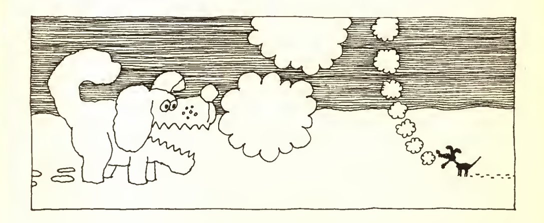
Может возникнуть естественный вопрос: а как же охлаждаются «сухие» предметы? Ведь в этом случае отсутствуют перенос воды и связанный с ним перенос энергии! Это, действительно, так. Но остается еще один процесс переноса энергии — при охлаждении и нагревании циркулирующего воздуха. Правда, «сухие» предметы охлаждаются гораздо медленнее, чем «влажные».

А теперь постарайтесь самостоятельно ответить на такие вопросы:

1. Когда дышишь на морозе, появляются туман и иней. Почему?

2. Почему при входе с мороза в дом запотевают очки? Почему очки «потеют» на морозе?

3. Почему в душевых обычно капает с потолка и с холодных труб, а трубы с горячей водой остаются сухими?





В. Болтянский

Метод отделяющих констант

За последние годы в практику письменных экзаменационных работ для поступающих в вузы вошли задачи, решение которых удобно начинать с нахождения множества значений, принимаемых некоторыми функциями. Иногда решение задачи на этом и заканчивается — из полученных результатов сразу следует ответ; в других случаях знание множества значений функции резко сокращает объем работы, указывает кратчайший путь к ответу.
О некоторых особенностях применения этого метода и рассказывается в настоящей статье.

Доказательство неравенств

Начнем со следующей задачи.

Пример 1. *Доказать неравенство*

$$x^2-2x\geqslant -3+\sin x. \quad (1)$$

Для решения достаточно заметить что луч $[-1;\infty[$, представляющий собой множество значений функции

$$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1,$$

не пересекается с множеством значений функции

$$g(x)=-3+\sin x,$$

то есть с отрезком $[-4;-2]$.

Можно сказать и иначе: *существует такое число* c (например, $c=-3/2$), *что для всех* $x\in\mathbf{R}$ *справедливы неравенства* $f(x)>c$, $c>g(x)$ (рис. 1), откуда и следует справедливость не только неравенства (1), но и более сильного: $f(x)>g(y)$ для любых x, $y\in\mathbf{R}$, то есть всегда

$$x^2-2x>-3+\sin y.$$

В более сложных примерах уже не удается найти константу c, «отделяющую» значения функции $f(x)$ от значений функции $g(x)$ на всей области их задания, но можно разбить числовую прямую на несколько промежутков, на каждом из которых существует своя отделяющая константа.

Пример 2. *Доказать неравенство*

$$\operatorname{arctg} x>4\sqrt{3}x-x^2-11. \quad (2)$$

В этом случае на луче $]-\infty;\sqrt{3}[$ (то есть при $-\infty<x<\sqrt{3}$) такой отделяющей константой является $c_1=-2$ (рис. 2), а на луче $[\sqrt{3};\infty[$ можно взять отделяющую константу $c_2=1{,}01$.

Разумеется, график на рисунке 2 лишь иллюстрирует сказанное; полное же доказательство, основанное на идее отделяющих констант, можно изложить, например, следующим образом. Функция

$$f(x)=\operatorname{arctg} x$$

при всех $x\in\mathbf{R}$ (и, в частности, при $x<\sqrt{3}$) удовлетворяет неравенству $f(x)>-\frac{\pi}{2}>-2$, то есть $f(x)>c_1$. С другой стороны, функция $g(x)=4\sqrt{3}x-x^2-11=$

$$=-(x-2\sqrt{3})^2+1$$

при $x=\sqrt{3}$ принимает значение

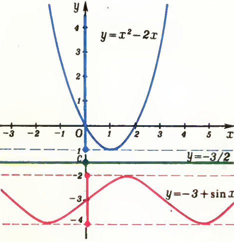


Рис. 1.

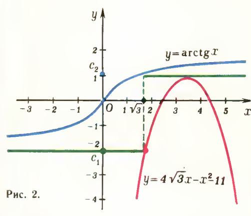


Рис. 2.

$g(\sqrt{3}) = -2 = c_1$, а слева от точки $x = \sqrt{3}$ эта функция возрастает, поэтому $g(x) < c_1$ при $x < \sqrt{3}$. Итак, $f(x) > c_1 > g(x)$ при $x < \sqrt{3}$, то есть при этих значениях x неравенство (2) справедливо. Осталось рассмотреть значения $x \geqslant \sqrt{3}$.

Заметим, что $f(\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi/3 > 1{,}01$, причем функция $f(x)$ — возрастающая, поэтому $f(x) > c_2$ при $x \geqslant \sqrt{3}$. Что же касается функции $g(x)$, то при любых $x \in \mathbf{R}$ (и, в частности, при $x \geqslant \sqrt{3}$) мы имеем $g(x) \leqslant 1 < c_2$. Таким образом, $f(x) > c_2 > g(x)$ при $x \geqslant \sqrt{3}$, то есть и при этих значениях x неравенство (2) справедливо.

Рассмотренный прием доказательства неравенств вовсе не следует считать каким-то изысканным, случайным, редкоприменимым. Напротив, для непрерывных функций этот прием можно считать универсальным. В самом деле, пусть, например, непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на отрезке $[a; b]$, причем прикинув вид этих графиков, мы обнаружили, что вроде бы на всем этом отрезке справедливо неравенство $f(x) > g(x)$. Как можно было бы доказать справедливость этого неравенства?

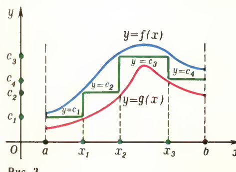


Рис. 3.

Если для всех $x \in [a; b]$ справедливо неравенство $f(x) > g(x)$, то графики функций $f(x)$ и $g(x)$ не имеют общих точек, и потому можно*) провести «ступенчатую ломаную» (рис. 3), отделяющую график функции $y = f(x)$ от графика функции $y = g(x)$. Но это и означает, что отрезок $[a; b]$ можно разбить на несколько меньших отрезков, на каждом из которых существует отделяющая константа c_i.

Разумеется, в этом рассуждении речь идет лишь о принципиальной возможности доказать неравенство $f(x) > g(x)$ методом отделяющих констант. В каждом же конкретном случае искусство применения этого приема состоит в том, чтобы найти подходящее разбиение отрезка $[a; b]$ на части и для каждой из этих частей указать соответствующую отделяющую константу.

Итерации

В общем случае затруднительно дать рекомендации, как подбирать разбиение на части и соответствующие отделяющие константы. Однако в некоторых случаях такие рекомендации предложить можно.

Пусть, например, обе функции $f(x)$, $g(x)$ — возрастающие (или обе убывающие), причем $f(a) > g(a)$. Проведем прямую $y = f(a)$ (рис. 4) и рассмотрим точку ее пересечения с графиком функции $y = g(x)$. Абсциссу этой точки обозначим через x_1. На отрезке $[a; x_1]$ за отделяющую константу можно принять число $c_1 = f(a)$. Действительно, на всем этом отрезке выполнены неравенства $f(x) \geqslant c_1$, $g(x) \leqslant c_1$, причем первое неравенство обращается в равенство лишь в левом конце отрезка $[a; x_1]$, а второе — лишь в правом. Отсюда

*) На самом деле за этим словом «можно» скрывается весьма не простая математическая теорема, которую мы здесь, конечно, доказывать не будем.

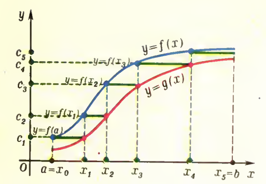


Рис. 4.

ясно, что на всем отрезке $[a;\ x_1]$ выполнено неравенство $f(x) > g(x)$.

Заметим, что отделяющая константа $c_1 = f(a)$ является в некотором случае наилучшей: если взять за c_1 константу, м е н ь ш у ю, чем $f(a)$, то отрезок, на котором «действует» эта константа, у м е н ь ш и т с я.

Теперь проведем прямую $y = f(x_1)$ и получим отрезок $[x_1;\ x_2]$, на котором $c_2 = f(x_1)$ является отделяющей константой; затем проведем прямую $y = f(x_2)$ и так далее (рис. 4). В результате мы разобьем отрезок $[a;\ b]$ на части и для каждой из этих частей получим отделяющую константу, тем самым доказав справедливость неравенства $f(x) > g(x)$ на всем отрезке $[a,\ b]$.

Проведенное рассуждение можно формализовать следующим образом.

Мы начинаем с точки $x_0 = a$.

Если для некоторого $k = 0,\ 1,\ \ldots$ уже известна точка x_k, то мы находим такую точку x_{k+1}, что $g(x_{k+1}) = f(x_k)$.

Повторением этого процесса (или, как говорят в математике, *итерацией*) мы по x_0 находим x_1, затем по x_1 находим x_2 и так далее. Если после нескольких итераций нам удастся добраться до правого конца отрезка, на котором заданы функции $f(x)$, $g(x)$, то неравенство $f(x) > g(x)$ будет доказано.

П р и м е р 3. *Найти корни уравнения*

$$\operatorname{tg} x = 4x - 2{,}5, \qquad (3)$$

лежащие в интервале $]0;\ \pi/2[$.

Функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = 4x - 2{,}5$ на интервале $]0;\ \pi/2[$ возрастают. Несколько первых итераций здесь выглядят следующим образом (значения функции $f(x)$ берутся *с недостатком*):

$x_0 = 0$;

$g(x_1) = f(x_0) = 0;\ 4x_1 - 2{,}5 = 0,\ x_1 = 0{,}625$;

$g(x_2) = f(x_1) \approx 0{,}72;\ 4x_2 - 2{,}5 = 0{,}72;\ x_2 = 0{,}805$;

Рис. 5.

$g(x_3) = f(x_2) \approx 1{,}04;\ 4x_3 - 2{,}5 = 1{,}04;\ x_3 = 0{,}885$;

$g(x_4) = f(x_3) \approx 1{,}22;\ 4x_4 - 2{,}5 = 1{,}22;\ x_4 = 0{,}93$;

$g(x_5) = f(x_4) \approx 1{,}34;\ 4x_5 - 2{,}5 = 1{,}34;\ x_5 = 0{,}96$;

$g(x_6) = f(x_5) \approx 1{,}42;\ 4x_6 - 2{,}5 = 1{,}42;\ x_6 = 0{,}98;\ \ldots$

После двух десятков итераций удается добраться до правого конца интервала $]0;\ \pi/2[$. Этим устанавливается, что на всем этом интервале справедливо неравенство $f(x) > g(x)$ и, следовательно, уравнение (3) на рассматриваемом интервале корней не имеет.

Заметьте теперь, что, проводя итерации, мы заранее не знаем, удастся ли нам добраться до правого конца отрезка $[a;\ b]$ (то есть удастся ли нам доказать справедливость неравенства $f(x) > g(x)$ на всем отрезке $[a;\ b]$). А как будут выглядеть итерации в случае, когда графики функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на отрезке $[a;\ b]$, пересекаются, то есть неравенство $f(x) > g(x)$ выполняется не на всем отрезке?

Рисунок 5 наглядно показывает, что тогда в результате б е с к о н е ч н о й последовательности итераций мы будем получать числа $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots$, которые п р и б л и ж а ю т с я к корню x^* уравнения $f(x) = g(x)$; точнее, число $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ представляет собой наименьший корень этого уравнения, содержащийся на отрезке $[a;\ b]$. Следовательно, с помощью последовательных итераций мы сможем приближенно вычислить этот корень.

Указанный прием часто применяется в вычислительной практике для приближенного вычисления корней уравнений. Вообще, в современной математике очень важную роль играют различные *итерационные методы*, дающие возможность не только с любой степенью точности решать уравнения, но и даже доказывать теоремы.

Решение уравнений

Метод отделяющих констант может применяться не только для доказательства неравенств, но и, в некоторых случаях, для решения уравнений, и притом не приближенного, а точного решения.

Пример 4. *Решить уравнение*

$$x^2 - 2x \sin x - 2\cos x + 2 = 0. \quad (4)$$

Запишем уравнение в виде

$$(x - \sin x)^2 = -(1 - \cos x)^2,$$

то есть в виде $f(x) = g(x)$, где

$$f(x) = (x - \sin x)^2,$$
$$g(x) = -(1 - \cos x)^2.$$

Очевидно, что для любого $x \in \mathbf{R}$ справедливы неравенства $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$. Отсюда ясно, что некоторое число x_0 только в том случае может удовлетворять равенству $f(x_0) = g(x_0)$, то есть быть корнем уравнения (4), если выполнены равенства $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$, то есть если x_0 является решением *системы*

$$\begin{cases} x - \sin x = 0, \\ 1 - \cos x = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы имеет корни $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), из которых лишь корень $x = 0$ удовлетворяет первому уравнению. Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Пример 5. *Решить уравнение*

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = \sqrt{\sin\frac{\pi x}{2}}. \quad (5)$$

Это уравнение можно записать в виде $f(x) = g(x)$, где

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1,$$
$$g(x) = \sqrt{\sin\frac{\pi x}{2}}.$$

Так как $f(x) = 1 + x(x - 1)^2$, то $f(x) \geqslant 1$ для всех $x \geqslant 0$. В то же время $g(x) \leqslant 1$ для всех x, принадлежащих области определения функции $g(x)$. Следовательно, на луче $x \geqslant 0$ число $c = 1$ является отделяющей константой для функций $f(x)$ и $g(x)$. Отсюда вытекает, что неотрицательное число может быть корнем уравнения (5), только если оно удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = 1, \\ g(x) = 1. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений, как легко видеть, имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, из которых только x_1 удовлетворяет второму уравнению. Итак, уравнение (5) имеет лишь один неотрицательный корень $x_1 = 1$.

Теперь посмотрим, нет ли отрицательных корней. Так как при $-2 < x < 0$ функция $g(x)$ не определена, то отрицательные корни надо искать лишь на луче $x \leqslant -2$. Но при $x \leqslant -2$ мы имеем

$$f(x) = 1 + x(x - 1)^2 \leqslant 1 - 2\cdot 3^2 = -17,$$

а $g(x) \geqslant 0$ по определению функции $\sqrt{x}$. Таким образом, отделяющей константой для $f(x)$ и $g(x)$ на луче $x \leqslant -2$ (в тех точках x, в которых функция $g(x)$ определена) является, например, число $c = -10$. Следовательно, рассматриваемое уравнение не имеет отрицательных корней, то есть $x_1 = 1$ — единственный корень уравнения (5).

* *
*

Заметим в заключение, что, несмотря на его универсальность, метод отделяющих констант не всегда является самым удобным средством для доказательства того или иного конкретного неравенства. Например, для доказательства неравенства $\operatorname{tg} x > 4x - 2{,}5$ на интервале $]0; \pi/2[$ (см. пример 3) можно было бы использовать тот факт, что производная функции $\varphi(x) = \operatorname{tg} x - 4x + 2{,}5$, равная $\frac{1}{\cos^2 x} - 4$, обращается в нуль только в одной точке этого интервала, а именно при $x = \pi/3$. В этой точке значение функции φ положительно:

$$\varphi(\pi/3) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 4\cdot\frac{\pi}{3} + 2{,}5 \approx 0{,}04.$$

В концах же интервала функция $\varphi(x)$ принимает бо́льшие значения: $\varphi(0) = 2{,}5$ и $\varphi(x) \to \infty$, если $x \to \pi/2$ (но $x < \pi/2$). Отсюда можно

сделать вывод, что в точке $x = \pi/3$ функция $f(x)$, рассматриваемая на интервале $]0;\ \pi/2[$, принимает *наименьшее* значение, и потому $\varphi(x) > 0$, то есть $\operatorname{tg} x > 4x - 2{,}5$ на всем этом интервале. Таким образом, применение производной дает в данном случае более простое решение.

Напротив, при решении неравенства $\operatorname{arctg} x > 4\sqrt{3x - x^2 - 11}$ (пример 2) для нахождения корней производной придется решать уравнение третьей степени, так что здесь метод отделяющих констант рациональнее.

Умение выбрать наиболее выгодный метод решения конкретной задачи зависит от практических навыков, от умения «видеть» графики, от владения понятием производной и другими средствами исследования функций. Читателям, которые хотели бы поупражняться в применении метода отделяющих констант, рекомендуем обратиться к очень полезной книге Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов, Пособие по математике для поступающих в вузы (М., «Наука», 1976, гл. IV, § 1).

Упражнения

1. Доказать, что при любом действительном x справедливы неравенства

а) $\sqrt{1 + x^2} > 6x - x^2 - 7$;

б) $\cos x > -\frac{1}{4}x^2$.

2 (МИСиС, 1971). Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1.$$

3 (МИФИ, 1971). Решить уравнение

$$\cos(\pi\sqrt{x-4})\cos(\pi\sqrt{x}) = 1.$$

4. Найти множество точек плоскости $M(x;\ y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sin x + \sin y = \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|}.$$

5 (ЯПИ, 1973). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2, \\ x^2 + y^2 - 4x = 0. \end{cases}$$

Е. Кузнецов

Линзы и системы линз

Явление преломления света на сферической поверхности раздела двух оптических сред позволяет получать изображения светящихся предметов. Эта возможность осуществляется с помощью линзы — прозрачного тела, ограниченного двумя сферическими поверхностями. Линза является основным оптическим элементом в таких приборах, как фотоаппарат, проекционный фонарь, микроскоп, телескоп и т. д.

На рисунке 1 показан разрез преломляющей сферической поверхности, разделяющей две оптические среды с различными показателями преломления. Очевидно, качественное изображение любого предмета возможно только в том случае, когда пучок лучей, исходящих из любой точки предмета (например, из точки P), после преломления соберется снова в точку. Вообще говоря, сферическая граница раздела двух сред не обеспечивает этого условия. Так, луч NB после преломления пересечет ось PQ, строго говоря, в другой точке, нежели луч MA. Однако при некоторых условиях пучок лучей, испущенных точкой, может собраться *практически* в точку. Это будет в том случае, когда высота h, на которой все лучи этого пучка пересекают преломляющую поверхность, мала по сравнению с радиусом кривизны OC преломляющей поверхности. Другими словами, когда мал угол α. Лучи, удовлетворяющие этому условию, назы-

ваются *параксиальными*. Для удаленных источников требование малости угла α эквивалентно требованию малости угла u. Но малость угла u не является достаточным условием параксиальности. Действительно, луч, параллельный оси PQ ($u=0$), но достаточно удаленный от нее (h велико), не будет параксиальным.

Таким образом, в зависимости от того, сколь хорошо выполняется условие параксиальности, в окрестности точки P' будет более или менее большой кружок размытия. Однако на практике нет необходимости делать его меньше некоторой, вполне определенной, величины. Например, если кружок размытия станет меньше элемента сетчатки глаза (зерна фотоэмульсии на фотопленке, неровностей матового стекла и т. п.), он будет восприниматься нами как точка. Его дальнейшее уменьшение в нашем зрительном ощущении ничего не изменит.

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело только с параксиальными лучами *). Кроме того, ограничимся рассмотрением только тонких линз, то есть таких линз, фокусные расстояния которых существенно больше их толщины.

Если тонкая линза изготовлена из материала с показателем преломления n, слева от линзы находится среда с показателем преломления n_1, а справа — с показателем преломления n_2, то имеют место соотношения

$$\frac{n_2}{F_2}=\frac{n-n_1}{R_1}+\frac{n-n_2}{R_2}, \qquad (1)$$

$$\frac{n_1}{F_1}=\frac{n-n_1}{R_1}+\frac{n-n_2}{R_2}. \qquad (2)$$

Здесь F_1 и F_2 — переднее и заднее фокусные расстояния линзы, R_1 и R_2— радиусы кривизны, соответственно, передней и задней поверхностей линзы. Эти соотношения можно получить (проделайте это самостоятельно!), рассматривая ход лучей, идущих от бесконечно удаленного источника, находящегося в первом случае слева от линзы, а втором случае — справа. В частности, когда с обеих сторон от линзы находится воздух ($n_1=n_2=1$),

$$\frac{1}{F_1}=\frac{1}{F_2}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \qquad (3)$$

Принято считать, что если поверхность своей выпуклой стороной обращена к среде с меньшим показателем преломления, то ее радиус кривизны R положителен ($R>0$), в противном случае $R<0$. Линзы, у которых фокусное расстояние положительно ($F>0$), называются *положительными* или *собирающими*, если же $F<0$ — *отрицательными* или *рассеивающими*. Величина $D=\frac{1}{F}$ называется оптической силой линзы; она измеряется в диоптриях.

При построении изображений, полученных с помощью тонких линз, используют три основных (или базисных) луча, показанных на рисун-

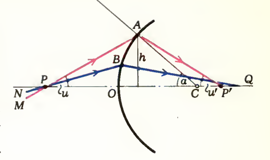


Рис. 1.

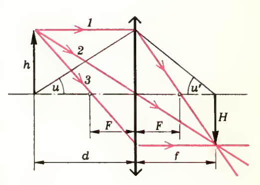


Рис. 2.

*) Можно, в принципе, придумать такие преломляющие поверхности, для которых условие параксиальности лучей не является обязательным. Однако наиболее просты в изготовлении именно сферические поверхности.

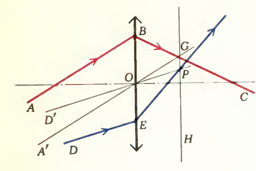


Рис. 3.

ке 2. С помощью этого рисунка нетрудно получить формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

а также выражения для ее линейного (поперечного) увеличения:

$$\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{f}{d}=\frac{f-F}{F}=\frac{F}{d-F}$$

и для углового увеличения:

$$\gamma=\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}=\frac{h/f}{h/d}=\frac{d}{f}=\frac{1}{\Gamma}.$$

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 1. *На поверхности воды ($n_в=1,3$) лежит двояковыпуклая тонкая стеклянная линза ($n_{ст}=1,5$) с радиусами кривизны $R_1=R_2=10$ см. Определите переднее и заднее фокусные расстояния линзы. Чему равно фокусное расстояние этой линзы в воздухе?*

Это относительно простая задача. Непосредственное применение формул (1) и (2), где $n_1=1$, $n_2=n_в=1,3$ и $n=n_{ст}=1,5$, дает

$F_1\approx 14$ *см* и $F_2\approx 18,5$ *см*.

Для фокусного расстояния линзы в воздухе формула (3) приводит к результату $F=10$ *см*.

Задача 2. *На рисунке 3 дан ход луча ABC через тонкую положительную линзу. Построить ход произвольного луча DE после преломления в линзе.*

Проведем луч $A'O$, параллельный лучу AB и проходящий через оптический центр линзы. Он не преломится. Точка G пересечения этого луча с лучом BC лежит в фокальной плоскости H. Луч $D'O$, параллельный DE, пересечет фокальную плоскость в точке P. Через эту же точку пройдет, преломившись, и луч DE.

Задача 3. *Какие очки вы пропишите близорукому человеку, который может читать текст, расположенный не далее 20 см?*

Очки ни в коей мере не исправляют дефектов человеческого глаза. Их роль сводится к тому, чтобы отобразить объекты окружающего мира на такое расстояние, с которого глаз четко различает предметы. В нашем случае для того чтобы близорукий человек мог видеть удаленные предметы, например, звезду, очки должны создавать изображение звезды не далее 20 *см* от глаза, а глаз будет рассматривать уже это изображение. Предположим, что линза очков вплотную придвинута к глазу (небольшой зазор между линзой и глазом несущественно исказит приведенные ниже расчеты), и запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

Здесь d — расстояние до звезды, а f — максимальное расстояние от изображения звезды до глаза. Член $\frac{1}{f}$ берется со знаком минус, поскольку изображение мнимое. Так как d очень велико, можно смело положить $\frac{1}{d}=0$. По условию задачи $f=20$ *см*. Отсюда

$$F=-20\ см,\quad D=-5\ дптр.$$

Таким образом, близорукому человеку следует прописать очки с рассеивающими линзами оптической силы −5 *дптр*.

Задача 4. *С помощью линзы с фокусным расстоянием F на экране получают уменьшенное и увеличенное изображения предмета, находящегося на расстоянии L от экрана. Найти отношение размеров изображений.*

Пусть высота предмета равна h. Тогда изображение имеет высоту $H=\Gamma h$, и отношение размеров изображений есть

$$\frac{H_1}{H_2}=\frac{\Gamma_1 h}{\Gamma_2 h}=\frac{f_1/d_1}{f_2/d_2}.$$

Теперь нам нужно найти d_1, d_2, f_1 и f_2. По формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$,

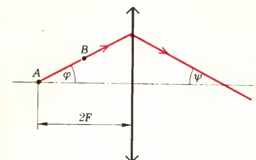


Рис. 4.

а из условия задачи $d+f=L$. Исключив d, получим квадратное уравнение

$$f^2 - fL + FL = 0,$$

откуда

$$f_{1,2} = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2}{4} - FL}.$$

Кроме того, из свойства обратимости лучей $d_1=f_2$ и $d_2=f_1$. Таким образом,

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{f_1^2}{f_2^2} = \left(\frac{L/2 + \sqrt{L^2/4 - FL}}{L/2 - \sqrt{L^2/4 - Fl}}\right)^2.$$

Задача 5. *С помощью положительной линзы получают изображения двух точечных источников A и B. Один из них расположен на оптической оси на двойном фокусном расстоянии от линзы, другой смещен от оси так, что прямая, соединяющая источники, образует с оптической осью угол $\varphi=30°$ (рис. 4). Под каким углом ψ к оси следует расположить плоский экран, чтобы одновременно получить на нем четкие изображения обоих источников?*

Очевидно, экран нужно расположить по лучу AB (проведенному от источника A через точку B) после его преломления в линзе. Используем формулу для углового увеличения:

$$\gamma = \frac{1}{\Gamma} = \frac{d}{f} = \frac{F}{f-F}.$$

Здесь f — расстояние от изображения источника A до линзы, а F — фокусное расстояние линзы. Поскольку A находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, $f=2F$. Следовательно,

$$\gamma = \frac{F}{2F-F} = 1, \text{ и } \psi=\varphi=30°.$$

Задача 6. *Сложный объектив состоит из двух тонких линз: положительной с фокусным расстоянием $F_1=20$ см и отрицательной с фокусным расстоянием $F_2=-10$ см. Линзы расположены на расстоянии $l=15$ см друг от друга. С помощью объектива получают на экране изображение Солнца. Какое фокусное расстояние F должна иметь тонкая линза, чтобы изображение Солнца, полученное с ее помощью, имело такой же размер?*

Здесь мы уже имеем дело с системой линз.

Найдем размер изображения Солнца, создаваемого сложным объективом, рассматривая ход лучей последовательно в обеих линзах. Изображение, создаваемое первой линзой, находится, очевидно, в ее фокальной плоскости. Размер этого изображения $H_1=F_1 \operatorname{tg}\alpha$, где α — угловой диаметр Солнца, видимый с Земли (рис. 5). Увеличение, даваемое второй линзой, равно $\frac{H_2}{H_1}=\frac{f_2}{d_2}$. По формуле линзы имеем

$$-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2},$$

где $d_2=F_1-l$ (изображение Солнца в первой линзе является мнимым источником для второй). Отсюда

$$f_2 = \frac{F_2(F_1-l)}{F_1+F_2-l}.$$

Таким образом, размер изображения,

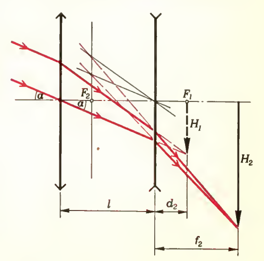


Рис. 5.

создаваемого всем объективом,

$$H_2 = \frac{F_1 F_2 \operatorname{tg} \alpha}{F_1 + F_2 - l}.$$

Однночная линза с фокусным расстояннем F дает изображенне, имеющее размер $H_2 = F \operatorname{tg} \alpha$. Сопоставляя два последних выражения, получнм

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2 - l} =$$

$$= \frac{20(-10)}{20 + (-10) - 15} \text{ см} = 40 \text{ см}.$$

Только что разобранная задача является частным случаем более общей, практически важной задачи: дана система двух (нлн более) тонкнх лннз с общей оптической осью; необходимо найти одну тонкую лннзу, действне которой эквивалентно действию данной системы. Эта задача будет полностью решена, если мы найдем фокусное расстоянне эквивалентной линзы н ее местоположение (нли, что то же самое, положенне ее фокуса). Попробуйте вывести соответствующие формулы самостоятельно. Для ориентировки приведем окончательные результаты: фокусное расстоянне искомой эквивалентной линзы равно

$$F = \frac{F_1 F_2}{\Delta},$$

а ее фокус находится от второй линзы на расстояннн f_2, равном

$$f_2 = \frac{F_2(\Delta - F_2)}{\Delta}.$$

Здесь F_1 и F_2 — фокусные расстояния первой н второй линз соответственно, а Δ — расстояние между задним фокусом первой линзы и передним фокусом второй (его называют *оптическим интервалом*). Принято считать $\Delta > 0$, еслн передннй фокус второй линзы лежит левее заднего фокуса первой лннзы, н $\Delta < 0$ в противном случае.

В заключение предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. На рисунке 6 дан ход луча ABC через тонкую отрицательную линзу. Определить построением фокусное расстояние линзы.

2. Какие очки вы пропишите дальнозоркому человеку, который резко видит предметы, расположенные не ближе 50 *см*?

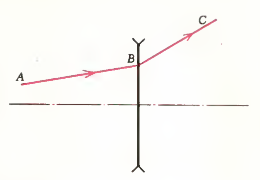


Рис. 6.

3. Положительная линза дает действительное изображение с увеличением в 2 раза. Определить фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением равно 24 *см*.

4. Предмет в виде отрезка длиной l расположен вдоль оптической оси тонкой положительной линзы с фокусным расстоянием F. Середина отрезка находится на расстоянии d от линзы. Линза дает действительное изображение всех точек предмета. Определить продольное увеличение предмета.

5. Положительная линза с фокусным расстоянием F и отрицательная с фокусным расстоянием $-F$ расположены на расстоянии a друг от друга так, что их оптические оси совпадают. На расстоянии a перед положительной линзой находится источник света. Изображение этого источника, даваемое системой линз, располагается на таком же расстоянии a за отрицательной линзой. Определить это расстояние.

6. Оптическая система состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ *см* и рассеивающей с фокусным расстоянием $F_2 = -30$ *см*. Оптические оси линз совпадают. Параллельный пучок лучей падает на первую линзу и, пройдя через систему, собирается в некоторой точке, лежащей на оптической оси. На сколько сместится эта точка, если линзы поменять местами?

7. В проекционном аппарате используется сложный объектив, состоящий из двух собирающих линз с фокусными расстояниями $F_1 = 20$ *см* и $F_2 = 15$ *см*. Линзы расположены на расстоянии $a = 5$ *см* друг от друга. Определить, с каким увеличением будет проецироваться диапозитив на экран, находящийся на расстоянии $b = 10$ *м* от объектива проектора. К диапозитиву обращена линза с фокусным расстоянием F_2.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени институт инженеров железнодорожного транспорта (МИИТ) имеет 10 факультетов, которые готовят высококвалифицированных инженеров различных специальностей.

В последние годы быстро растет и развивается факультет автоматики и вычислительной техники. Сейчас в институте работают студенческие вычислительные залы и вычислительный центр, оснащенные быстродействующими ЭВМ «ЕС-1030», «БЭСМ-4», «Урал-14Д», «Сетунь», «Мир», а также мощными аналоговыми машинами. Факультет готовит инженеров-электриков и инженеров-математиков для промышленности и транспорта по специальностям: автоматизированные системы управления (специализация — проектирование и эксплуатация автоматизированных систем управления), автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте (специализации — автоматика и телемеханика, системы передачи информации, радиосвязь), автоматика и телемеханика (в промышленности, специализация — схемы и системы автоматики и телемеханики), электронные вычислительные машины, прикладная математика (специализация — математическое обеспечение автоматизированных систем управления).

Все факультеты МИИТа готовят инженеров с прочными знаниями основ математики, но особенно это относится к факультету автоматики и вычислительной техники. Эта особенность факультета учитывалась при составлении вариантов вступительных экзаменов по математике и физике. Поскольку специальность «прикладная математика» связана с подготовкой инженеров-математиков, способных вести научно-исследовательскую работу в различных областях техники, для этой специальности предлагались варианты еще более сложные (хотя задачи, входящие в эти варианты, не содержали материал, выходящий за пределы программы средней школы).

Ниже приводятся некоторые варианты вступительного письменного экзамена по математике и задачи из билетов устного экзамена по физике в МИИТе в 1976 году.

Математика

Вариант 1

(специальности: промышленное и гражданское строительство, экономика строительства, экономика транспорта, эксплуатация железных дорог, мосты и тоннели, электрификация железных дорог, промышленная теплоэнергетика, тепловозостроение, строительные и дорожные машины)

1. Два велосипедиста выезжают одновременно из пункта A в одном и том же направлении. Скорость первого на 2 *км/час* больше скорости второго. Через 12 минут первый велосипедист остановился на 6 минут, чтобы устранить неисправность, и, возобновив движение, догнал второго велосипедиста на расстоянии 14 *км* от места его остановки. Определить скорости велосипедистов.

2. Решить неравенство

$$\log_{1/4} \frac{2x-1}{x+1} < \cos \frac{2}{3}\pi.$$

3. Вычислить острый угол прямоугольного треугольника, стороны которого образуют арифметическую прогрессию.

4. Найти $\sin 2\alpha$, если известно, что $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = 1{,}4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Вариант 2

(специальности: автоматизированные системы управления, электронные вычислительные машины, автоматика и телемеханика в промышленности)

1. Двоим рабочим было поручено выполнить некоторую работу. Сначала работал t_1 часов только один первый рабочий, затем t_2 часов только один второй. Остальную часть работы они закончили вместе. Вся работа продолжалась 6 часов, причем первый рабочий выполнил 5/6 всей работы.

Если бы сначала работал t_1 часов только один второй рабочий, затем t_2 часов только один первый рабочий, после чего они вместе закончили бы остальную часть работы, то вся работа продолжалась бы 7 часов.

За сколько часов выполнит всю работу каждый рабочий в отдельности, если первому на это требуется на 6 часов меньше, чем второму, и каковы промежутки времени t_1 и t_2?

2. Решить неравенство

$$|x-3|^{2x^2-7x} > 1.$$

3. На ребре двугранного угла 120° взят отрезок длины c и из его концов восставлены к нему в различных гранях перпендикуляры длин a и b. Определить длину отрезка прямой, соединяющего концы этих перпендикуляров.

4. Решить уравнение

$$\sin 2x - 5\sin x + 5\cos x + 5 = 0.$$

Вариант 3

(специальность: прикладная математика)

1. В шахматном турнире участвовали ученики девятых и десятых классов. Все десятиклассники набрали 27 очков. Число очков, набранных десятиклассниками в играх против девятиклассников, на 21 больше числа очков, набранных девятиклассниками в играх против десятиклассников. Сколько девятиклассников и десятиклассников участвовали в турнире, если за победу начисляется одно очко, за ничью $^1/_2$ очка и число десятиклассников больше 1?

2. Доказать, что при всех значениях x и y имеет место неравенство

$$x^2+xy+y^2+2x-2y+4\geqslant 0.$$

3. Определить углы прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанного около него круга относится к радиусу вписанного круга, как 5 : 2.

4. Найти $\alpha+2\beta$, если $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$, $3\sin 2\alpha=2\sin 2\beta$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Физика

Факультет автоматики и вычислительной техники

1. За время $t=10$ *сек* тело прошло путь $s=18$ *м*, при этом скорость его увеличилась в $n=5$ раз. Считая движение равноускоренным, определить абсолютную величину ускорения тела.

2. Шарик, размерами которого можно пренебречь, подвешен на невесомой и нерастяжимой нити длиной l. Шарик с постоянной скоростью движется по окружности в горизонтальной плоскости. Определить линейную скорость шарика, если нить, описывая при своем движении коническую поверхность, составляет с вертикалью угол α.

3. Маленький шарик висит на тонкой шелковой нити в пространстве между горизонтально расположенными круглыми пластинами плоского воздушного конденсатора. Заряд шарика $q=10$ ед. заряда СГСЭ. Когда пластинам конденсатора сообщили заряд $|Q|=980$ ед. заряда СГСЭ, сила натяжения нити увеличилась в 2 раза. Определить силу натяжения нити, когда шарик находится в поле заряженного конденсатора. Радиус пластин конденсатора $R=10$ *см*; массой нити можно пренебречь.

4. Прямоугольная коробочка из жести плавает в воде. Масса коробочки $m=100$ *г*, площадь дна $S=50$ *см*^{2}, высота $H=6$ *см*. Определить высоту надводной части коробочки. Плотность воды $\rho_в=1$ *г/см*^{3}.

5. Если три одинаковых элемента, соединенных параллельно, замкнуть на внешнее сопротивление $R=0{,}3$ *ом*, на нем выделится такая же мощность, как и в случае последовательного соединения девяти таких же элементов. Чему равно внутреннее сопротивление одного из элементов?

6. Ультрафиолетовые лучи с длиной волны $\lambda_1=0{,}3$ *мкм*, попадая на катод фотоэлемента, вызывают поток фотоэлектронов со скоростью $|\vec{v}_1|=10^6$ *м/сек*. Светом какой длины волны нужно облучить фотоэлемент, чтобы кинетическая энергия фотоэлектронов стала $E_2=4\cdot10^{-19}$ *дж*? Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ *дж·сек*; скорость света $c=3\cdot10^8$ *м/сек*; масса электрона $m_e=9{,}1\times10^{-31}$ *кг*.

7. На рисунке изображен луч BC, прошедший через рассеивающую линзу. Построить ход этого луча до линзы, если положение фокусов линзы задано.

C
B
F
F

Все остальные факультеты

1. Первую половину пути поезд шел с постоянной скоростью в 1,5 раза большей, чем вторую половину. Средняя скорость поезда на всем пути $|\vec{v}_{ср}|=43{,}2$ *км/час*. Каковы скорости поезда на каждой половине пути?

2. Две гири с массами $m_1=7$ *кг* и $m_2=11$ *кг* висят на концах нити, перекинутой через неподвижный блок. Вначале гири находятся на одной высоте. Через какое время после начала движения более легкая гиря окажется на $h=10$ *см* выше тяжелой? Массой блока и нити, а также сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Математический маятник, длина которого $l=25$ *см*, совершает $n=120$ колебаний в течение $t=2$ *мин*. Определить по этим данным ускорение свободного падения.

4. Газ нагрели от температуры 27°С до температуры 39°С. На сколько процентов увеличился при этом объем газа, если давление оставалось неизменным?

5. Однородный проводник имеет сопротивление R_1. На сколько равных частей нужно разделить этот проводник, чтобы общее сопротивление его частей, соединенных параллельно, стало равным R_2?

6. Пуля массой $m=10$ *г*, летящая со скоростью $|\vec{v}|=10^3$ *м/сек*, попадает в льдину. Определить массу растаяв его при этом льда, если известно, что 50% кинетической энергии пули перешло в тепло. Начальная температура льдины 0°С, удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ *дж/кг*.

7. Предмет находится на расстоянии $2F$ от оптического центра рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F. Где и какое получится изображение этого предмета? Решение пояснить чертежом.

И. Берзина, В. Коровин

Машинная графика

1. На рисунке 1 машина нарисовала семейство эллипсов. Похоже, что в их расположении есть какая-то закономерность. Однако эти эллипсы не имеют ни общего центра, ни общего фокуса, они и не подобны друг другу.

Не могли бы вы придумать, откуда взялся такой рисунок? Нельзя ли его «увидеть» где-нибудь, скажем, «на природе»?

2. Семейство линий на рисунке 2 — более сложное. Это даже не эллипсы, а внешняя линия (с углами), видимо, вообще не из этого семейства, хотя и связана с ним.

Откуда мог взяться этот рисунок?

Ю. Котов

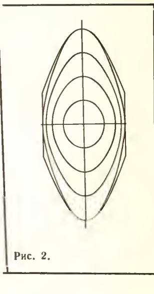


Рис. 2.

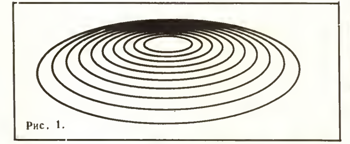


Рис. 1.









Кривые зеркала

Эти фотографии сделаны в «комнате смеха». Попробуйте «угадать», в какие зеркала смотрится эта девушка и как удалось фотографу получить такой необычный «автопортрет».

Фото Ю. Нижниченко и В. Машатина



Научное общество учащихся «ВИИТОРУЛ»

2 октября 1976 года в Кишиневе, в Центральном лектории общества «Знание», состоялась научно-теоретическая конференция школьников. Более шестисот ее участников встретились с московскими учеными — докторами физико-математических наук, профессорами московских вузов В. Кресиным, В. Тычинским и В. Левиным. Встречу открыл известный молдавский физик, академик АН МССР С. Радауцан. Внимательно слушали ребята рассказы о достижениях и проблемах физики низких температур, квантовой электроники, о будущем современной математики.

Большинство из тех, кто пришли на эту встречу, были членами научного общества школьников «ВИИТОРУЛ», что означает по-русски «БУДУЩЕЕ». Это общество возникло в 1971 году при Республиканском Дворце пионеров и школьников по инициативе ученых Молдавии. Теперь в его рядах более 2000 членов.

В совместном постановлении бюро ЦК ЛКСМ Молдавии и Министерства народного образования МССР о создании Республиканского научного общества учащихся сказано: «Ныне, когда в школах Кишинева и республики успешно действует большое количество клубов по интересам, кружков, факультативных групп старшеклассников, когда олимпиады, конференции и конкурсы по различным отраслям знаний стали традицией, есть возможность и необходимость перейти к качественно новой форме работы по развитию познавательных интересов и творческих способностей учащихся». Этой новой формой и стало научное общество «ВИИТОРУЛ».

Цели и задачи общества так сформулированы в его уставе:

«1. Общество ставит своей задачей вовлечение школьников старших классов в научно-исследовательскую работу, ознакомление их с методами и приемами простейших научных исследований, обучение умению обращаться с необходимыми для исследования приборами и оборудованием.

2. Общество расширяет знания, кругозор учащихся в различных областях науки, техники, искусства, литературы, прививает интерес и навыки к научным исследованиям, помогает в выборе специальности и воспитывает общественников - организаторов.

3. Целью общества является не только дать возможность школьникам овладеть внепрограммным материалом, но и воспитать учащихся как пропагандистов любой отрасли науки.

4. Долг и обязанность старшеклассников — ценить советскую науку, гордиться ею. Глубоко изучать и пропагандировать творческое наследие корифеев русской научной мысли, знать их жизненный, трудовой и творческий путь, учиться у них страстной любви к своей Родине, своему народу, впитать в себя их лучшие черты — высокую идейность, патриотизм, гражданственность, трудолюбие, целеустремленность».

Созданию научного общества предшествовала большая подготовительная работа: смотры, конкурсы, конференции. Желающие вступить в члены общества должны были представить рекомендации преподавателей соответствующих дисциплин и комитета комсомола школы.

Как же устроено это общество?

Работа общества «ВИИТОРУЛ» проходит под общим руководством ЦК ЛКСМ Молдавии, Министерства народного образования МССР, Совета молодых ученых при ЦК ЛКСМ и Республиканского Дворца пионеров и школьников. Непосредственное руководство осуществляет Научно-методический совет из ученых и преподавателей, председателем которого является член-корреспондент Академии педагогических наук СССР, доктор физико-математических наук В. Белоусов. Совет руководит работой секций, содействует организации филиалов в районных центрах, организует проведение Дней науки и конференций учащихся, чтение лекций, очные и заочные консультации.



Большая роль отведена Ученическому совету, куда входят председатели всех секций. Члены этого совета принимают активное участие в организации всех мероприятий, в разработке и осуществлении научных планов. Они выступают с докладами перед учащимися школ, ПТУ, участвуют в выездных сессиях, выпускают свою газету, поддерживают связь с другими научными обществами и, прежде всего, со Студенческим научным обществом Молдавии.

В общество «ВИИТОРУЛ» принимаются ученики 8—10 классов. Но с 1975 года кандидатами в члены общества могут быть и семиклассники. Они присутствуют на заседаниях секций, участвуют во всех массовых мероприятиях общества и научных экскурсиях, готовят выступления о жизни и деятельности выдающихся ученых, делают обзоры научно-популярных журналов.

С восьмого класса начинается самостоятельиая работа в секции. Каждый член общества получает определенную тему и научного консультанта, прикрепляется к какому-либо научному учреждению.

Работа в секциях проводится по двум направлениям:

1. Теоретические занятия, лекции ученых, семинары, сообщения учащихся по темам их исследований, доклады о выдающихся ученых.

2. Исследовательская работа под руководством научного консультанта.

Секции делятся на группы, в зависимости от тем исследований. Например, секция физики делится на следующие группы: теоретической физики, физики полупроводников, электроники и электронных приборов, физики атомного ядра, оптики и спектроскопии, общей физики, импульсной и газовой электроники, физики твердого тела. Эти группы работают на базе Института прикладной физики АН МССР, физического факультета Кишиневского государственного университета, электрофизического факультета Кишиневского политехнического института. Секция математики делится на группы: математической логики, современных вопросов алгебры, прикладной математики и программирования, геометрических преобразований, истории математики. Они работают на базе Института математики АН МССР, математического факультета Кишиневского государственного университета, кафедр математики Политехнического и Сельскохозяйственного институтов.

Все члены общества имеют членские билеты, в которые вносятся их личные планы исследовательской работы и отмечается (за подписью научного руководителя секции), как выполняется эта работа. Наиболее отличившиеся члены общества получают при окончании школы характеристики-рекомендации, предоставляющие им определенные преимущества при поступлении в высшие учебные заведения Молдавии по соответствующей специальности.

Более 150 ученых, преподавателей вузов, аспирантов работают со старшеклассниками в научном обществе, приобщая их к научным исследованиям.

Важными событиями в жизни общества «ВИИТОРУЛ» являются городские и республиканские научно-творческие конференции учащихся. Кроме членов общества в них принимают участие известные ученые, а также школьники, приглашаемые из других республик. Так, на III городской конференции в Кишиневе, проходившей под девизом: «Способность, труд, талант», было прочитано 20 докладов по различным проблемам физики и 7 — по математике, а также проведена малая математическая олимпиада. Среди докладов были, например, такие: «Применение метода электронного парамагнитного резонанса в изучении кальцитов», «Метод изображений в электростатике», «Искровой разряд и его применение в технике», «Исследования образования капли и ее взаимодействия с поверхностью жидкости», «Нахождение центров тяжести частей круга», «Решение геометрических задач методом введения вспомогательной окружности», «Использование теоремы Больцано о непрерывности».

Общество «ВИИТОРУЛ» стремится привлечь к участию в своей работе как можно больше сельских школьников. С этой целью регулярно проводятся выездные сессии в сельских районах. Сейчас в Молдавии действует 12 районных филиалов общества. . .

Кончилась учеба в школе, а с ней и занятия в научном обществе учащихся. Чему же научило общество человека, вступающего в самостоятельную жизнь? Самому главному — творческому отношению к труду, к науке. Тот, кто нашел в нем свое любимое дело, уже не может жить просто так, ничем не интересуясь и не увлекаясь. А это и есть главная цель научного общества учащихся. Недаром в памятной книге общества «ВИИТОРУЛ» мы увидели такие записи, оставленные бывшими членами общества:

«Самое главное для нас в том, что у каждого осталось в памяти воспоминание о чем-то полезном и нужном. . .

Благодаря обществу можно отойти от шаблона, от привычных страниц школьного учебника к серьезной научной литературе . . .

Общение с учеными, доброжелательными и внимательными наставниками, — незабываемо . . .

Самое трудное в жизни — найти себя. Общество прекрасно помогает этому...»

В. Лешковцев

Задачи наших читателей

Разобьем двоичную запись натурального числа a с конца на группы вида 10^k. Например, $a=1011000100$ разбивается так:

$$\underbrace{10}_{a_4}\ \underbrace{1}_{a_3}\ \underbrace{1000}_{a_2}\ \underbrace{100}_{a_1}.$$

Через a' обозначим число, полученное из даиного вычеркиванием его последней группы a_1, а через $a\otimes b$ обозначим число, образованное приписыванием к a справа числа b (в этих обозначениях $a=a_n\otimes a_{n-1}\otimes\otimes\ldots\otimes a_2\otimes a_1$).

Докажите, что для любого натурального числа a и нечетного натурального b справедливы следующие утверждения.

а) $ab=(\ldots(b'\otimes a_n+b')\otimes\otimes a_{n-1}+b')\otimes\ldots)\otimes a_2+b')\otimes a_1$ (здесь a_i — группы разбиения a, $i=1, 2, \ldots, n$);

б) a делится на b тогда и только тогда, когда некоторый член последовательности

$c_1=a$, $c_2=c_1'-b'$, $c_3=c_2'-b'$, ..., $c_{k+1}=c_k'-b'$, ...

равен нулю; при этом, если $c_{n+1}=0$, то $a:b=(c_n)_1\otimes(c_{n-1})_1\otimes\ldots\otimes(c_1)_1$.

В. Абрамович
(г. Ростов-на-Дону)



К статье «Ускорители»

1. $l_n = \frac{1}{2}\beta_n\lambda$.

2. 194,7 *Мэв*; 644,4 *Мэв*; 2784,2 *Мэв*.
3. Уменьшится в 1,725 раза.

К статье «Четные и нечетные функции»

Контрольные вопросы

1. Четной.
2. Нечетной.
3. Если $x \in D(f)$, то $-x \in D(f)$, и поэтому $D(f_+) = D(f_-) = D(f)$.
4. Если f четна, то $f_+ = f$, $f_- = 0$; если f нечетна, то $f_+ = 0$, $f_- = f$.
5. Для многочлена $p(x)$ в формулах (4) для p_+ взаимно уничтожаются все одночлены нечетной степени, а для p_- — все одночлены четной степени.
6. а) Если многочлен $p(x)$ является четной функцией, то в его разложении $p = p_+ + p_-$ нечетная часть равна нулю (см. вопрос 4), поэтому $p = p_+$; согласно ответу на вопрос 5 в p_+, а значит, и в p входят одночлены только четной степени.

Случай б) рассматривается аналогично.

Упражнения

1. Четные: f_1, f_3, f_9; нечетные: f_8, f_{10}, f_{11}.
2. а) Четные при $a = 0$, нечетные при $b = 0$;
б) четные при $b = 0$, нечетных нет (если $a \neq 0$);
в) четные при $b = 0$, нечетные при $a = 0$.
3. а) $f_+(x) = x^2 + 2$, $f_-(x) = x - \frac{1}{x}$;
б) $f_+(x) = \frac{2x}{x^3 - x}$, $f_-(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x}$;
в) $f_+(x) = 2x \operatorname{tg} x$, $f_-(x) = (x^2+1)\operatorname{tg} x$;
г) $f_+(x) = 2^{x-1} + 2^{-x-1}$, $f_-(x) = 2^{x-1} - 2^{-x-1}$.
4. $f(0) = 0$.
5. $f(x) = 0$ при любом $x \in D(f)$, где $D(f)$ — произвольное подмножество числовой оси, симметричное относительно точки 0.
6. а) Нет; б) да; в) нет.
7. а) Да; б) 1), 3) — нет; 2) — да.
8. а) Воспользуйтесь правилом дифференцирования сложной функции для $F(x) = f(-x)$.
б) 1) Нет (пример: $f(x) = x^3 + 1$); 2) — да.
9. 1) Невозможно в случае (г), возможно многими способами — в случае (а).
2) Невозможно в случае (в), возможно многими способами — в случае (а).
10. Нельзя в случае б), можно бесконечным числом способов в случае в).
11. Указание. Все эти функции будут периодическими и либо четными (а), г)), либо нечетными (б), в)), поэтому график функции достаточно построить на «половине периода» — на отрезке $[0; T/2]$, где T — период, а затем воспользоваться свойствами четности и периодичности.

К статье «Метод отделяющих констант»

1. а) На луче $x \geqslant 2$ можно взять отделяющую константу $c_1 = 2{,}1$; в интервале $1 < x < 2$ — константу $c_2 = 1{,}1$; на луче $x \leqslant 1$ — константу $c = 0$.
б) $c_1 = 0$ при $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ при $\frac{\pi}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{2\pi}{3}$,
$c_3 = -1$ при $|x| \geqslant \frac{2\pi}{3}$ (точки на границах этих интервалов проверяются отдельно).
2. $x = -1$. Указание. Функция в левой части уравнения — возрастающая.
3. $x = 4$. Указание. Поскольку $|\cos t| \leqslant 1$, данное уравнение равносильно совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} \cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1, \\ \cos(\pi\sqrt{x}) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\pi\sqrt{x-4}) = -1, \\ \cos(\pi\sqrt{x}) = -1. \end{cases}$$

4. Указание. При $x>0$, $y>0$ получаем $\sin x = 1$, $\sin y = 1$; при $x>0$, $y<0$ или $x<0$, $y>0$ получаем $\sin x + \sin y = 0$; при $x<0$, $y<0$ должно быть $\sin x = -1$, $\sin y = -1$.
5. $x = 0$, $y = 0$. Указание. Заметить, что $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = |x-1| + |x+1| \geqslant 2$, поэтому $y = 0$, $|x| \leqslant 1$.

К статье «Линзы и системы линз»

1. См. рис. 1.
2. Дальнозоркому человеку следует прописать очки с собирающими линзами оптической силы $D = 2$ *дптр*.
3. $F = f/3 = 8$ *см*.
4. $K = \frac{F^2}{(d-F)^2 - (l/2)^2}$.

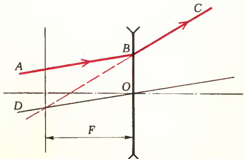


Рис. 1.

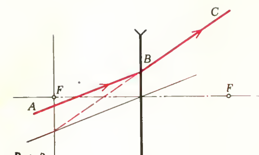


Рис. 2.

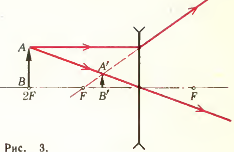


Рис. 3.

5. $a = \sqrt{3}\ F$.
6. $x = 60$ *см*.
7. $\Gamma \approx 99$.

К статье «Московский институт инженеров железнодорожного транспорта»

Математика

Вариант 1

1. 20 *км/час*, 18 *км/час*. 2. $x < -1$. 3. arctg (3/4), arctg (4/3). 4. — 0,5376.

Вариант 2

1. 6 часов, 12 часов; $t_1 = 4$, $t_2 = 1$. 2. $x<0$, $2<x<7/2$, $x>4$. 3. $\sqrt{c^2 + a^2 + b^2 + ab}$. 4. $x_1 = \pi + 2k\pi$, $x_2 = \pi/2 + 2k\pi$ (k — целое).

Вариант 3

1. 3 десятиклассника и 9 девятиклассников. 2. Указание. Положить $x + 2 = a$, $y - 2 = b$ и привести неравенство к виду $(a + b)^2 - ab \geqslant 0$. 3. arctg (3/4), arctg (4/3). 4. $\alpha + 2\beta = \pi/2$. Указание. Перейдя к функциям двойных углов, получим из первого равенства $\cos 2\beta = \frac{3}{2}(1 - \cos 2\alpha)$; подставив его в формулу $\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta = 1$, найдем $\cos 2\alpha = 7/9$. Далее найти $\cos(\alpha + 2\beta)$.

Физика

Факультет автоматики и вычислительной техники

1. $|\vec{a}| = \dfrac{2(n-1)s}{(n+1)t^2} = 0{,}24$ *м/сек*^{2}.

2. $v = \sqrt{l\,|\vec{g}|\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}$.

3. $|\vec{F}_{\text{н}}| = \dfrac{8q\,|Q|}{R^2} = 784$ *дин*.

4. $h = H - \dfrac{m}{\rho_{\text{в}} S} = 4$ *см*.

5. $r = R\,\dfrac{n_1(n_2 - 1)}{n_2(n_1 - 1)} = 0{,}4$ *ом*.

6. $\lambda_2 = \dfrac{hc}{hc/\lambda_1 + E_2 - m_e|\vec{v}_1|^2/2} = 3{,}3\cdot 10^{-7}$ *м*.

7. См. рис. 2.

Все остальные факультеты

1. $|\vec{v}_1| = 15$ *м/сек* $= 54$ *км/час*; $|\vec{v}_2| = 10$ *м/сек* $= 36$ *км/час*.

2. $t = \sqrt{\dfrac{(m_1 + m_2)h}{(m_2 - m_1)|\vec{g}|}} \approx 0{,}21$ *сек*.

3. $|\vec{g}| = \dfrac{4\pi^2 n^2 l}{t^2} \approx 9{,}86$ *м/сек*^{2}.

4. $\dfrac{\Delta V}{V} = \left(\dfrac{T_2}{T_1} - 1\right)100\% = 4\%$.

5. $n = \sqrt{R_1/R_2}$.

6. $m_{\text{л}} = \eta\,\dfrac{m|\vec{v}|^2}{2\lambda} = 7{,}5$ *г*.

7. Мнимое и уменьшенное в 3 раза изображение находится на расстоянии $f = 2/3\ F$ от линзы (см. рис. 3).

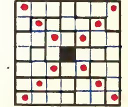
К заметке «Иззаоблачное» сияние»

(*см. с. 29*)

Если стоять у железнодорожного полотна, то видно, как рельсы сходятся вдали. Точно так же расхождение солнечных лучей в разные стороны и расширение отдельных лучей объясняется эффектом перспективы. Лучи в действительности почти параллельны, но пронизывают облака в разных местах. Это и создает иллюзию расхождения лучей «иззаоблачного» сияния. Красивый эффект, не правда ли?

«Укладка тетрамино»

(*см. «Квант» № 1, с. 59*)


Рис. 4.

К задачам

(*см. «Квант» № 2, с. 9*)

3. Указание. Нижнюю оценку нетрудно найти, вычислив сумму первых 6 сла-

гаемых. Для доказательства верхней оценки заметьте, что

$$\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\ldots+\frac{1}{n!}<\frac{6}{7!}+\frac{7}{8!}+\frac{8}{9!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=$$

$$=\frac{7}{7!}-\frac{1}{7!}+\frac{8}{8!}-\frac{1}{8!}+\frac{9}{9!}-\frac{1}{9!}+\ldots+\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+$$

$$+\frac{1}{7!}-\frac{1}{8!}+\frac{1}{8!}-\ldots-\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}<\frac{1}{6!}.$$

4. а) $x=6$; б) $x=8$, $y=1$; в) $x=8$, $y=z=7$, $t=4$.

К головоломкам

«16 карточек»

(*см. «Квант» № 2, с. 14*)

БАРИН БУРАН БУЛКА КОЛБА
БИРКА БУРКА РОЛИК РУБКА
САТИН КЛОУН ЛУНКА СУКНО
СИЛОК СУРОК САЛОН РИСКА

(*см. «Квант» № 2, с. 34*)

«Ходом коня»

52	35	16	49	42	33	14	47
17	38	51	34	15	48	43	32
36	53	18	41	50	31	46	13
39	4	37	54	11	44	25	60
8	19	40	3	30	61	12	45
5	2	7	10	55	26	59	24
20	9	64	29	22	57	62	27
1	6	21	56	63	28	23	58

«Точные квадраты»

«4 576 36 81 16 9025».

К статье «Много битов из ничего»

(*см. «Квант» № 3*)

1. С одной стороны, б е з п е р е б о р а мы умеем доказать, что не всякое нечетное число, большее трех, представимо в нужном виде, однако известное нам доказательство этого факта неэлементарно. С другой стороны, п е р е б о р о м можно добраться до наименьшего непредставимого числа — 149.

2. Поскольку реплики (π_1), (σ_1) в обоих диалогах совпадают, рассуждения трех первых разделов статьи остаются справедливыми. Таким образом, s_0 является элементом множества

$C=\{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53\}$,

причем все элементы множества C удовлетворяют условию (σ_1').

(π_2) означает

При любом разложении числа p_0 в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2), их сумма обладает свойством (σ_1'). (π_2')

В статье доказано, что любое число, обладающее свойством (σ_1'), принадлежит C. Поэтому мы можем заменить (π_2') на

При любом разложении числа p_0 в произведение двух множителей, удовлетворяющих неравенствам (1), (2), их сумма принадлежит C. (π_2'')

Переберем все представления чисел из C в виде суммы двух слагаемых: $s=k+l$ $(2\leqslant k\leqslant l)$ и проверим каждое произведение kl на выполнение (π_2''). Перебор сократится примерно вдвое, если предварительно при помощи (π_2'') доказать, что p_0 не делится на 4.

Результат перебора: только 4 числа из C дают нам разложения $s=k+l$, для которых kl удовлетворяет условию (π_2''):

$23=6+17$,
$35=13+22$,
$37=3+34=11+26=14+23$,
$53=2+51=7+46$.

Поскольку S и после реплики (π_2) не смог отгадать k_0 и l_0, $s_0\neq 23$ и $s_0\neq 35$. Итак, ввиду (σ_2), $s_0=37$ или $s_0=53$.

Догадавшись об этом, P сумел определить k_0 и l_0. Следовательно, $p_0=11\cdot 26=286$, так как, если бы у P было $102=3\cdot 34=2\cdot 51$ или $322=14\cdot 23=7\cdot 46$, он не смог бы выбрать между $37=3+34=14+23$ и $53=2+51=7+46$.

Итак, $s_0=37$, $p_0=286$, $k_0=11$, $l_0=26$.

К статье «Ставь на минус!»

(*см. «Квант» № 3*)

К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы

1. а) d6; б) h3; в) a7; г) h8.
2. а) I—5, II—4; б) I—1, II—2; в) I—4, II—0.

З а д а ч и

1. Минусы стоят на полях с нечетными номерами и горизонтали, и вертикали.

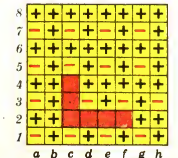


Рис. 5.

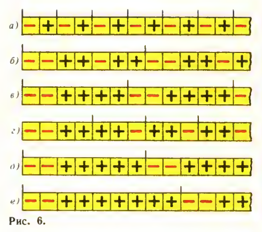


Рис. 6.

2. Минусы стоят на полях, у которых разность номеров горизонтали и вертикали делится на 3.

3. На поле стоит минус, если сумма номеров горизонтали и вертикали при делении на 3 дает в остатке 1.

4. См. рис. 5.

5. Минусы стоят на полях, у которых номера и горизонтали, и вертикали при делении на 4 дают остаток 1 или 2.

6. Минусы стоят только на главной диагонали (у полей которой номер горизонтали равен номеру вертикали).

7. См. рис. 6 (в случае *г*) период начинается с пятой клетки, во всех остальных — с первой).

8. а) Пусть на клетке с номером n (короче: «клетке n») стоит минус. Тогда на клетках $n+a$ и $n+b$ стоят плюсы, поскольку с них можно пойти на клетку n, а на поле $n+a+b$ стоит минус, так как с него можно попасть только на клетки $n+a$ и $n+b$.

Пусть теперь на клетке n стоит плюс. Тогда в соответствии с «золотыми правилами» на поле $n-a$ или на поле $n-b$ стоит минус. Если на $n-a$ стоит минус, то, как доказано, на клетке $n-a+(a+b)=n+b$ также стоит минус, а на клетке $n+a+b$ — плюс, так как с нее можно попасть на $n+b$. Случай, когда минус стоит на $n-b$, разбирается аналогично.

Итак, расстановка плюсов и минусов периодична и полностью определяется расстановкой первых $a+b$ знаков.

б) Рассмотрим первые $a+b$ клеток. Пусть для определенности $a<b$. Расстановка знаков на первых b полях определяется только ходом на a клеток и потому такова: a минусов, a плюсов, a минусов, a плюсов... Поскольку ход на b клеток влево с полей с номерами $b+1$, ..., $a+b$ ведет на один из первых a минусов, то на этих клетках стоят a плюсов. Они едут за a минусами тогда и только тогда, когда $b=a(2n+1)$ (n — целое).

Итак, длина периода равна $2a$, если $b=a(2n+1)$, и равна $a+b$ в противном случае.

9. Как следует из решения задачи 8, количество минусов в начале равно a, а бóльший ход имеет длину, равную длине периода, минус a. Так, на рисунке 7 (в статье) $a=2$, $b=7-2=5$.

Но если получается $b=a$, то есть периодичность сводится к чередованию a минусов и a плюсов, то мéньший ход равен именно a, а про бóльший можно сказать лишь, что он равен $a(2n+1)$, где n — натуральное число.

10. Пусть n — наибольшая длина хода. Тогда для того, чтобы отметить поле плюсом или минусом, достаточно знать знаки лишь на предыдущих n полях. Разобьем полоску на последовательные группы по n клеток. По принципу Дирихле (см. «Квант», 1977, № 2, с. 17) расстановка знаков в каких-то двух группах совпадает. Пусть эти две группы начинаются с клеток k и p соответственно, причем $k<p$. Тогда расстановка знаков на клетках k, $k+1$, ..., $p-1$ совпадает с расстановкой на клетках p, $p+1$, ..., $p+(p-k-1)$ и так далее. Другими словами, имеется период длины $p-k$, начинающийся с клетки k.

11. На рисунке 8,*а* (в статье) вторая клетка отмечена плюсом, следовательно, есть ход на 1 клетку влево. Третья также отмечена плюсом — есть ход на 2 клетки влево. Наконец, седьмая клетка отмечена плюсом — есть ход на четвертую или на первую клетку. Если на четвертую, то этот ход — на 3 клетки влево. Но тогда на четвертой клетке вопреки рисунку должен стоять плюс. Следовательно, есть ход на 6 клеток влево. Итак, этот рисунок соответствует игре, в которой ходить можно на 1, 2 или 6 клеток влево.

Могут ли быть другие игры с такой же расстановкой плюсов и минусов? Да, конечно. Например, игра, в которой ходить можно на 1, 2, 6 или 13 клеток влево или на 1, 2, 5 или 6 клеток влево.

Рисунки 8, *б*, *в* (в статье) соответствуют играм с ходами на 1,4 или 7 клеток влево и на 2,4 или 7 клеток влево.

12. Не всегда — это сразу следует из рисунка 9, *б* в статье. Судя по его первым трем клеткам, в игре должны быть ходы на 1 и 2 клетки влево, но это противоречит дальнейшей расстановке знаков.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 3)

1. Самый сильный — Портос, затем следуют д'Артаньян, Атос и Арамис.

2. Указание. Дробь сократима тогда и только тогда, когда числитель и знаменатель имеют общий множитель, отличный от единицы. Но

$$\frac{2n^2-1}{2n+1}=n-\frac{n+1}{2n+1},$$

$$\frac{2n+1}{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1},$$

а дробь $\frac{1}{n+1}$ несократима.

3. 81.

4. Прибавим к искомому числу единицу, полученное число должно делиться на все числа от 2 до 10. Поэтому искомым числом является наименьшее общее кратное всех чисел от 2 до 10, уменьшенное на 1; это 2519.

5. Можно. Две соседние части можно раскрасить в любые разные цвета, затем часть, граничащую с ними обеими, — в третий цвет и так далее.

К заметке «Мартовская капель»
(см. «Квант» № 3, с. 15)

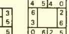
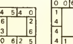
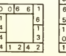
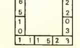
1) Для образования ледяного сталактита необходимы два условия: температура воздуха должна быть немного ниже 0°С, и должен быть источник текущей воды. Вода образуется из снега, лежащего на крыше здания, при освещении его солнечными лучами. Как известно, освещенность поверхности зависит от угла падения лучей. При соответствующей высоте Солнца над горизонтом и подходящем наклоне крыши поглощаемой снегом энергии может оказаться достаточно, чтобы снег начал таять. Но поскольку температура воздуха ниже 0°С, стекающие маленькие капли воды замерзают, образуя сосульки. 2) Вначале ледяная сосулька представляет собой цилиндрический столбик, вода медленно стекает по нему и повисает на его конце каплей. По мере роста длины столбика отдельные капли талой воды не успевают с него стекать и замерзают, утолщая сталактит в верхней его части. 3) Длина ледяного конуса, при прочих равных условиях, зависит в основном от некоторой оптимальной скорости притекания воды к нему: как большая, так и малая скорости не способствуют росту ледяной сосульки. 4) Сосульки могут изгибаться под влиянием ветра, конвекционных потоков воздуха и других случайных факторов. 5) Ледяная сосулька — кристалл, оптически почти однородный и потому прозрачный. Снег же имеет поликристаллическую структуру. Вследствие многократных отражений и преломлений на гранях отдельных кристалликов снега свет в нем диффузно рассеивается. Поэтому снег не прозрачен.

К «Квантово-волновым ребусам»
(см. «Квант» № 3, 3-ю с. обл.)

1. 95 846×95 846 = 9 186 455 716.
2. 26 953×26 953 = 726 464 209.
3. 26 157×68 351 = 1 787 857 107.
4. 24 153 ×24 153 = 583 367 409.
5. 18 594×18 594 = 345 736 836.
6. 48 957×24 751 = 1 211 734 707.
7. 52 903×52 903 = 2 798 727 409.
8. 46 027×46 027 = 2 118 484 729.
9. 12×7 = 84
   29×3 = 87
10. 39+8=47
    96:2=48.

К головоломкам
«Рамки из домино»
(см. «Квант» № 3, с. 11)

Рис. 7.

(см. «Квант» № 3, с. 18)
«Задача из «примера»
пример = 851 745.

«Извилистый путь»

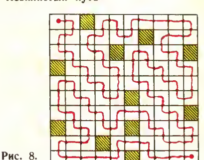


Рис. 8.

«Магические круги»

Задача имеет два решения, одно из них приведено на рисунке 9.

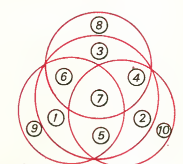


Рис. 9.

Номер готовили:
В. Березин, А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова, Э. Смирнов, Э. Пономарева

Зав. редакцией Л. Чернова
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. РУМЯНЦЕВА

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 26/I 1977 г.
Подписано в печать 11/III 1977 г.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,62. Т-03468
Цена 30 коп. Заказ 24. Тираж 297 085 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

297 085

КУБ-ХАМЕЛЕОН

Грани 27 кубиков окрашены в некоторые цвета так, что, складывая из этих кубиков большой куб (размером $3\times3\times3$), можно получить красный куб, можно — синий, а можно — зеленый. Как окрашены грани этих 27 кубиков?



РАЗБОРНЫЙ КУБ

Шефы подарили детскому саду восемь одннаковых деревянных фигурок (см. рисунок), из которых был сложен куб размером $4\times4\times4$. Дети разобрали куб иа детали, а сложить куб снова не могут. Помогите им.

Л. Мочалов

ГОЛОВОЛОМКИ

1. Уложите все 28 косточек домино в виде коврика (см. рисунок) так, чтобы суммы очков вдоль каждой прямой (без разрывов) были одинаковы и равны 25 (косточки не обязательно прикладывать друг к другу одинаковыми значениями очков).

2. Изображенный на рисунке «числовой коврик» переплетен цифрами и знаками арифметических действий. Допишите в пустые места цифры так, чтобы все равенства были верны.

3. Уложите 28 косточек домино в виде узора, изображенного на рисунке, так, чтобы суммы очков вдоль всех прямых были одинаковы. При этом в тех местах, где кости касаются (на рисунке таких мест 12), на них должны быть одинаковые цифры.

4. Возьмите комплект домино и отложите в сторону кость 0—0. Теперь, рассматривая оставшиеся косточки как дроби (правильные или неправильные), расположите их в отмеченных на рисунке местах так, чтобы сумма дробей в каждой строке равнялась числу косточек данной строки.

Л. Мочалов

